详细解答

STEP I 2014，第 5 题

纯数学 · 三次不等式

STEP I 2014，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s1-q5

关键思路

第 (i) 部分是一个单变量三次函数（cubic），它在 $x \geq 0$ 上的最小值恰好是零，并在 $x = a$ 处与轴相切。这一条不等式 $(x+2a)^3 \geq 27a^2x$，其实是经过伪装的算术—几何平均不等式（AM–GM inequality）：左边涉及和 $x+a+a$，右边则涉及积 $x \cdot a \cdot a$。第 (ii) 及 (iii) 部分的关键在于选择以甚么作为 x 和 a，并准确追踪等号何时成立。

解答

第 (i) 部分

求导数（derivative）：

$$f'(x) = 3(x+2a)^2 - 27a^2 = 3((x+2a)^2 - 9a^2) = 3(x-a)(x+5a),$$

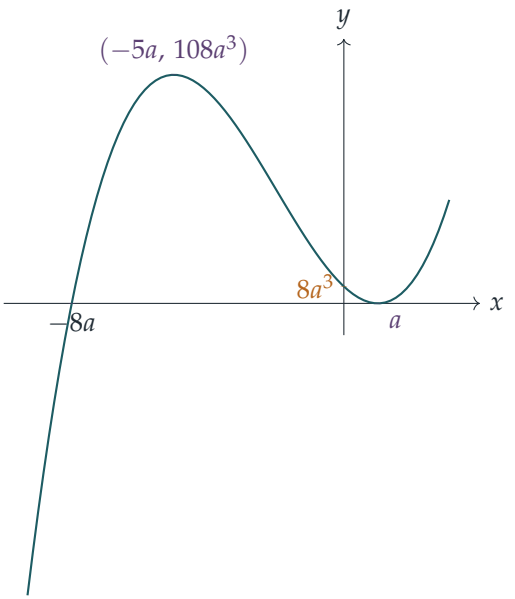
所以驻点（stationary points）位于 $x = a$ 及 $x = -5a$。在这两点，

$$f(a) = (3a)^3 - 27a^3 = 0, \qquad f(-5a) = (-3a)^3 + 135a^3 = 108a^3,$$

而 $f(0) = 8a^3$。由于 f 是首项系数为正的三次函数，$x = -5a$ 是局部极大点，$x = a$ 是局部极小点。因为极小值是 0，图像在 $x = a$ 处与 x 轴相切，所以 $(x-a)^2$ 是一个因式；再比较常数项，便得

$$f(x) = (x-a)^2(x+8a),$$

你可以把两边都展开成 $x^3 + 6ax^2 - 15a^2x + 8a^3$ 来验证。



当 $x \geq 0$ 时，图像由高度 $8a^3 \geq 0$ 开始，下降至 $x = a$ 处的 0，然后一直上升。所以 f 在 $x \geq 0$ 上的最小值是 0，并且

$$f(x) \geq 0 \quad \text{当} x \geq 0,$$

等号只在 $x = a$ 时成立。(因式分解后的形式直接说明了同一件事：当 $x \geq 0$ 时，$(x-a)^2 \geq 0$，而且除非 $x = a = 0$，否则 $x + 8a > 0$。) 若 $a = 0$，图像退化为 $f(x) = x^3$，它在 $x \geq 0$ 时仍然非负，等号只在 $x = 0 = a$ 时成立。在所有情况下，

$$(x+2a)^3 \geq 27a^2x \quad (x, a \geq 0), \qquad \text{等号成立当且仅当} x = a.$$

第 (ii) 部分

我们想处理 xy^2，所以在第 (i) 部分中取 $a = y \geq 0$。对于 $x \geq 0$、$y \geq 0$，

$$27xy^2 \leq (x+2y)^3 \leq 3^3 = 27,$$

第二步成立是因为 $0 \leq x + 2y \leq 3$，而立方是递增函数。因此在整个区域内 $xy^2 \leq 1$。

这个上界是可以达到的：等号需要 $x = y$（来自第 (i) 部分）及 $x + 2y = 3$，由此得 $x = y = 1$，而确实 $1 \cdot 1^2 = 1$。所以 xy^2 的最大值是 1，只在 $x = 1$、$y = 1$ 时取得。

第 (iii) 部分

? **想一想** 第 (i) 部分只涉及两个数 x 和 a。它怎能告诉我们关于三个数的事情?

把 q 和 r 合在一起：设 $x = p$ 及 $2a = q + r$，所以 $a = \frac{1}{2}(q + r) \geq 0$。由第 (i) 部分得

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2.$$

而 $\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 - qr = \frac{(q-r)^2}{4} \geq 0$，且 $p \geq 0$，所以

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2 \geq 27pqr,$$

这正是所求的不等式。

等号情况。若 $(p + q + r)^3 = 27pqr$，则这串不等式中的两个不等号都必须取等号。

- 第一个取等号，当且仅当 $x = a$，即 $p = \frac{1}{2}(q + r)$。
- 第二个取等号，当且仅当 $\frac{27}{4}p(q - r)^2 = 0$，即 $p = 0$ 或 $q = r$。

若 $p = 0$，第一个条件给出 $q + r = 0$，所以亦有 $q = r = 0$。若 $q = r$，第一个条件给出 $p = q$。无论哪种情况，都有 $p = q = r$。反过来，若 $p = q = r$，则两边都等于 $27p^3$。所以等号成立当且仅当

$$p = q = r.$$

验算

- 展开 $(x - a)^2(x + 8a)$ 可得回 $(x + 2a)^3 - 27a^2x$；取 $a = 1$，$f(0) = 8$、$f(1) = 0$、$f(3) = 4 \cdot 11 = 44$，全部非负。
- 在第 (ii) 部分，试试直线 $x + 2y = 3$ 上的其他点：$(x, y) = (2, \frac{1}{2})$ 给出 $\frac{1}{2}$，$(0.5, 1.25)$ 给出约 0.78，两者都小于 1。用电脑在三角形上的细密网格中搜索，亦得到最大值 1，位于 $(1, 1)$。
- 在第 (iii) 部分，$p = 1, q = 2, r = 3$ 给出 $216 \geq 162$；用电脑在较小的正整数中搜索，发现只有当 $p = q = r$ 时等号才成立。

常见错误

- 证明了 $f(a) = 0$，却没有解释为何这是 $x \geq 0$ 上的最小值：你需要用到图像的形状（或因式分解），包括端点值 $f(0) = 8a^3 \geq 0$。
- 在第 (ii) 部分，忘记检查上界 1 是否真的可以达到；单有上界并不等于最大值。
- 在第 (iii) 部分的等号情况中，只得出 $q = r$，而遗漏了另一可能 $p = 0$；这情况必须排除（或证明它迫使 $p = q = r = 0$）。

STEP 之外

第 (iii) 部分就是三项的算术—几何平均不等式 $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$；而这里的方法——把两个变量合并为它们的平均值，再运用一条双变量不等式——正是 n 项算术—几何平均不等式各种经典证明的雏形。第 (ii) 部分是一个小型的约束最优化（constrained optimisation）问题，大学课程通常以拉格朗日（Lagrange）乘数法处理这类问题，不过像算术—几何平均不等式这类不等式，往往能更简洁地得出答案。如想看更多同类风格的内容，可参阅 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。