详细解答

STEP I 2014，第 4 题

纯数学 · 相关变率

> **STEP I 2014，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q4

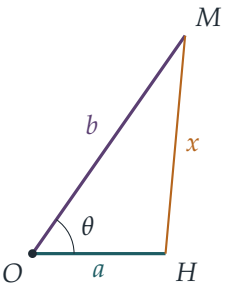
关键思路

两支指针与连接两针尖端的线段构成一个三角形，所以利用余弦定律（cosine rule）便可以用 θ 表示 x。由于时钟准确，θ 以恒定速率增加，因此 x 的增加率就是这个常数乘以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$。求这个量的最大值就变成一道普通的单变量微积分题目，而驻点（stationary point）方程原来是一条关于 $\cos\theta$ 的二次方程，而且可以整齐地因式分解。

解答

x 的增加率

设 O 为转轴，H 为时针尖端，M 为分针尖端，于是 $OH = a$、$OM = b$、$\angle HOM = \theta$ 及 $HM = x$。



由余弦定律，

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

注意 $x \geq b - a > 0$，所以我们可以放心除以 x。对时间 t 求导，

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ab\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

时钟准确，所以每支指针都以恒定的角速率（angular speed）转动，而两针之间的夹角以恒定速率 $\omega > 0$ 改变（即两个角速率之差；当 $0 \leq \theta < \pi$ 时，分针正在抛离时针，所以 θ 在增加）。因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega\, ab\,\frac{\sin\theta}{x}.$$

所以我们要找出 $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{x}$ 在 $0 \leq \theta < \pi$ 上何处取得最大值，同时要记住 x 依赖于 θ，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{ab\sin\theta}{x}$。

求最大值

由商法则（quotient rule），

$$f'(\theta) = \frac{x\cos\theta - \sin\theta\cdot\dfrac{ab\sin\theta}{x}}{x^2} = \frac{x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta}{x^3}.$$

记 $c = \cos\theta$。利用 $x^2 = a^2 + b^2 - 2abc$ 及 $\sin^2\theta = 1 - c^2$，分子为

$$\begin{aligned} x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta &= (a^2+b^2)c - 2abc^2 - ab + abc^2 \\ &= -(abc^2 - (a^2+b^2)c + ab) \\ &= -(ac-b)(bc-a) \\ &= (b-ac)(bc-a). \end{aligned}$$

? **想一想** 我们怎样知道这个驻点是极大点，而且是唯一的驻点?

由于 $c \leq 1 < b/a$，我们有 $ac < b$，所以因子 $b - ac$ 恒为正数。此外 $x^3 > 0$。所以 $f'(\theta)$ 与 $bc - a$ 同号，即与 $\cos\theta - \dfrac{a}{b}$ 同号：

- 当 $\cos\theta > a/b$（θ 较小）时，$f'(\theta) > 0$，f 递增；
- 当 $\cos\theta < a/b$（θ 较大）时，$f'(\theta) < 0$，f 递减。

由于 $\cos\theta$ 在 $[0, \pi)$ 上递减，且 $0 < a/b < 1$，在此范围内恰好有一个 θ 使 $\cos\theta = a/b$，而 f 在此之前上升，在此之后下降。所以这给出 x 增加率的全局最大值。此时

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{a}{b} = b^2 - a^2,$$

所以当 $x = (b^2 - a^2)^{1/2}$ 时，x 的增加率最大，得证。

从几何角度看，$x^2 + a^2 = b^2$ 表示三角形在 H 处是直角：当连接两针尖端的线段与时针垂直时，增加率最大。

$b = 2a$ 的情况

此时 $\cos\theta = a/b = \frac{1}{2}$，所以最大增加率出现在 $\theta = \pi/3$ 时。

以正午后的分钟数量度 t。分针在 60 分钟内转过 2π，时针则在 720 分钟内转过 2π，两者都从竖直位置起顺时针转动。所以两针之间的夹角为

$$\theta = 2\pi\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{720}\right)t = 2\pi\cdot\frac{11}{720}\,t = \frac{11\pi}{360}\,t,$$

此式在其值小于 π 时成立。由正午时 $\theta = 0$ 开始，θ 首次到达 $\pi/3$ 的时刻满足

$$\frac{11\pi}{360}\,t = \frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{120}{11} = 10\tfrac{10}{11}\text{ 分钟.}$$

这大约是 10.91 分钟（10 分钟零大约 55 秒），比 11 分钟稍少，得证。

验算

- 当 $\theta = 0$ 时，增加率为 0（两针重叠，$x = b - a$ 处于最小值）；当 $\theta \to \pi$ 时，增加率再次趋向 0（此时 $x \to a + b$ 处于最大值）。所以最大值严格位于两者之间，正如我们所预期。
- 取 $a = 1$、$b = 2$，逐分钟追踪两针尖端的位置并估算它们之间距离的变化率，最大变化率出现在 $t \approx 10.909$ 分钟，此时 $x \approx 1.732 = \sqrt{3} = \sqrt{b^2 - a^2}$。
- 答案略少于 11，是因为假如时针静止不动，分针恰好需要 10 分钟到达 60°；但时针会慢慢向前移，所以需要多一点时间。120/11 与大家熟悉的“两针在 720/11 分钟后再次重合”属于同一类数字。

常见错误

- 求 x 本身的最大值，或者求 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ 的最大值时，在使用商法则那一步没有留意 x 也依赖于 θ。
- 只用分针的速率（每分钟 $2\pi/60$）作为 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$，这样会得出恰好 10 分钟；其实两针之间的夹角是以两个速率的*差*增长的。
- 忘记舍去 $\cos\theta = b/a$ 这个根；由于 $b > a$，这个根是不可能的。

STEP 之外

这是一道相关变率（related rates）问题：某个量以已知速率改变，我们追踪一个在几何上与之相关的量如何随之变化。同样的想法——用随时间均匀变化的角度来描述位置——

正是研究行星运动的起点：两颗在圆形轨道上运行的行星之间的距离，表现与这里的 x 完全一样，而它们分离得最快的时刻也是用同样方法求得。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以向量发展这类运动学。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。