详细解答

STEP I 2014，第 3 题

纯数学 · 多项式方程与不等式

> **STEP I 2014，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q3

关键思路

两个积分都是初等积分，所以条件不过是一条关于 a 和 b 的多项式方程。关键在于找出公因式 $b-a$（它不为零，所以可以约去），以及在第 (iii) 部分中，留意到剩下的式子具有足够的对称性，可以用和 $b+a$ 与差 $b-a$ 简洁地表示。

解答

计算两个积分后，条件为

$$\frac{b^3-a^3}{3}=\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2(b+a)^2}{4}. \qquad (*)$$

由于 $b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$ 且 $b-a>0$，我们可以把 $(*)$ 除以 $b-a$，得到

$$4(b^2+ab+a^2)=3(b-a)(b+a)^2. \qquad (**)$$

第 (i) 部分

当 $a=0$ 时，$(**)$ 变成 $4b^2=3b^3$。由于 $b>0$，可以除以 b^2，得到

$$b=\tfrac{4}{3}.$$

第 (ii) 部分

当 $a=1$ 时，$(**)$ 变成

$$4(b^2+b+1)=3(b-1)(b+1)^2=3(b^3+b^2-b-1),$$

即 $3b^3+3b^2-3b-3-4b^2-4b-4=0$，亦即

$$3b^3-b^2-7b-7=0,$$

得证。

现设 $f(x)=3x^3-x^2-7x-7$，则

$$f'(x)=9x^2-2x-7=(9x+7)(x-1).$$

驻点（stationary point）位于 $x=-\frac{7}{9}$（局部极大值（local maximum），因为这个三次函数的首项系数为正）及 $x=1$（局部极小值（local minimum）），且

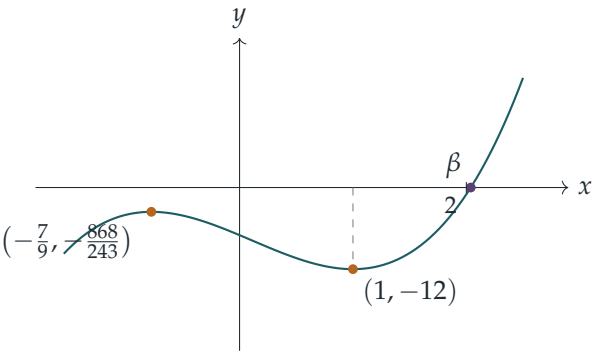
$$f(1)=3-1-7-7=-12,\qquad f\left(-\tfrac{7}{9}\right)=\frac{-343-147+1323-1701}{243}=-\frac{868}{243}.$$

想一想 知道局部极大值的数值，如何告诉我们有多少个根?

局部极大值是负数。当 $x\le 1$ 时，f 先递增至 $x=-\frac{7}{9}$，然后递减，所以在这范围内 $f(x)\le f(-\frac{7}{9})<0$：没有满足 $x\le 1$ 的根。当 $x>1$ 时，f 严格递增（f' 的两个因式皆为正），且 $f(x)\to\infty$，所以它恰好穿过零一次。因此恰好有一个实根，而

$$f(2)=24-4-14-7=-1<0,\qquad f(3)=81-9-21-7=44>0,$$

所以由连续性（continuity）可知，这个根位于 2 与 3 之间。



草图显示曲线 $y=3x^3-x^2-7x-7$：两个转向点（turning point）都位于 x 轴下方，所以曲线只穿过 x 轴一次，位于 $\beta\approx 2.04$。

第 (iii) 部分

设 $p=b+a$ 及 $q=b-a$，则 $p^2=b^2+2ab+a^2$ 及 $q^2=b^2-2ab+a^2$，所以

$$3p^2+q^2=4b^2+4ab+4a^2=4(b^2+ab+a^2).$$

因此 $(**)$ 的左方是 $3p^2+q^2$，而右方是 $3qp^2$。所以

$$3p^2+q^2=3p^2q,$$

得证。移项得 $q^2=3p^2(q-1)$。由于 $q>0$，左方为正，所以 $q\neq 1$，且

$$p^2=\frac{q^2}{3(q-1)}.$$

至于推论部分：

- 下界（*lower bound*）。$q^2>0$ 且 $p^2>0$（因为 $p=b+a>0$），所以 $3(q-1)=q^2/p^2>0$，即 $q>1$。
- 上界（*upper bound*）。由于 $a\geq 0$，我们有 $p=q+2a\geq q>0$，所以 $p^2\geq q^2$。因此

$$\frac{q^2}{3(q-1)}\geq q^2 \iff 1\geq 3(q-1) \iff q\leq \tfrac{4}{3},$$

  其中我们除以 $q^2>0$ 并乘以 $3(q-1)>0$，两者都不会改变不等号的方向。

因此 $1<b-a\leq \frac{4}{3}$，而等号成立若且唯若 $a=0$，这正是第 (i) 部分的情况。

验算

- 第 (i) 部分与第 (iii) 部分吻合：$a=0$ 给出 $q=b=\frac{4}{3}$，正是范围的上端。
- 第 (ii) 部分同样吻合：根为 $b\approx 2.0390$，所以 $q=b-1\approx 1.039$，位于 $(1,\frac{4}{3}]$ 之内。在 $[1,2.0390]$ 上计算两个积分，得到的数值相等（约为 2.4924），而且准确至多个小数位。
- 反过来，$(1,\frac{4}{3}]$ 中任何 q 都给出 $p=q/\sqrt{3(q-1)}\geq q$，从而得到合法的 $a=\frac{1}{2}(p-q)\geq 0$；所以这个界是最佳的（sharp）。

常见错误

- 在第 (ii) 部分忘记约去 $b-a$，结果得到一条带有多余根 $b=1$ 的四次方程。
- 只证明 $f(2)<0<f(3)$：这只证明了在 $(2,3)$ 内有一个根，却没有证明它是唯一的实根。你还需要考虑转向点。
- 在第 (iii) 部分，未确立 $q-1>0$ 便把不等式除以 $q-1$。

STEP 之外

积分形式的柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）给出 $\left(\int_a^b x\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$，等号只在被积函数 x 为常数时成立，而它并非常数。结合题目给定的条件，这表示 $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x < (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$，所以 $b-a>1$：一行便得出第 (iii) 部分的下界。柯西－施瓦茨不等式有多种形式，是大学一年级分析学中最常用的工具之一；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）细致地建立了黎曼积分（Riemann integral）以及类似这样的不等式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。