详细解答

STEP I 2014，第 2 题

纯数学 · 对数函数的积分

> **STEP I 2014，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q2

关键思路

一切都建基于因式分解（factorising）$x^2-4=(x-2)(x+2)$，这样二次式的对数（logarithm）便可拆成 $\ln(2-x)+\ln(2+x)$，而这两部分都可以用第 (i) 部分（及其镜像）的结果即时积分。至于绝对值（modulus）符号，只是要求我们留意 $\ln|x^2-4|$ 在哪里为正、在哪里为负，而第 (ii) 部分的草图正好显示了这一点。

解答

第 (i) 部分

当 $x<2$ 时，$2-x>0$，因此所有式子都有定义。我们对右方求导，并对 $-(2-x)\ln(2-x)$ 使用乘积法则（product rule）。$-(2-x)$ 的导数（derivative）是 1，而根据链式法则（chain rule），$\ln(2-x)$ 的导数是 $-\frac{1}{2-x}$。所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-(2-x)\ln(2-x)+(2-x)\right] &= 1\cdot\ln(2-x)-(2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2-x}\right)-1\\ &= \ln(2-x)+1-1=\ln(2-x),\end{aligned}$$

可见题中所给的原函数（antiderivative）正确。

（另一做法是代换（substitution）$u=2-x$，并利用 $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u-u$。）

同理，当 $x>-2$ 时，

$$\int \ln(2+x)\,\mathrm{d}x=(2+x)\ln(2+x)-(2+x)+c,$$

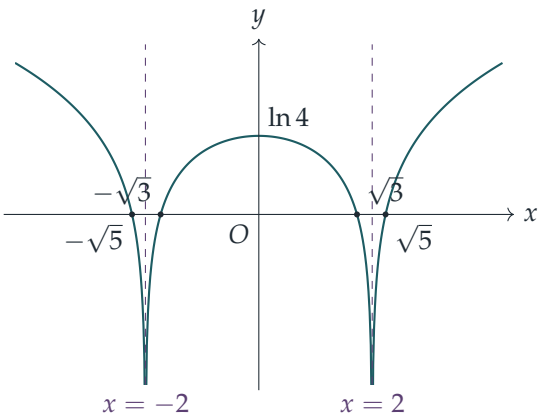
这个结果稍后亦会用到。

第 (ii) 部分

设 $f(x) = \ln|x^2 - 4|$，其定义域为 $x \neq \pm 2$。由于 $f(-x) = f(x)$，曲线关于 y 轴对称 (symmetric)。

- 当 $|x| < 2$ 时：$f(x) = \ln(4 - x^2)$，在 $x = 0$ 取得最大值，此时 $y = \ln 4$。当 $4 - x^2 = 1$，即 $x = \pm\sqrt{3}$ 时，函数值为零；当 $x \to \pm 2$ 时，函数趋向 $-\infty$。
- 当 $|x| > 2$ 时：$f(x) = \ln(x^2 - 4)$，在 $x = \pm 2$ 附近由 $-\infty$ 上升，在 $x^2 - 4 = 1$，即 $x = \pm\sqrt{5}$ 处与轴相交，之后缓慢增长，增长方式类似 $2\ln|x|$。

直线 $x = \pm 2$ 是铅垂渐近线（vertical asymptote）。



第 (iii) 部分

由正 x 轴、y 轴及 A 所围成的有限区域，就是 $x = 0$ 与 $x = \sqrt{3}$ 之间的拱形部分，在此范围内 $y = \ln(4 - x^2) \geq 0$。其面积为

$$\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 + x)\,\mathrm{d}x,$$

这里用了 $\ln(4 - x^2) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$；由于两个因式在此范围内皆为正，等式成立。根据第 (i) 部分，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-(2 - x)\ln(2 - x) + (2 - x)\Big]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + 2\ln 2 - 2 \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2\ln 2,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[(2+x)\ln(2+x)-(2+x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})-2\ln 2+2\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-2\ln 2.\end{aligned}$$

想一想 怎样把 $\ln(2-\sqrt{3})$ 与 $\ln(2+\sqrt{3})$ 合并?

由于 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$，所以 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$。把两个积分相加，$\ln 2$ 项互相抵消，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x &= (2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}\\ &= 4\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3},\end{aligned}$$

正如所求。

第 (iv) 部分

在 $|x|<2$ 的范围内，B 就是 A 在两条渐近线之间的部分，并把位于轴下方的部分向上反射。由草图可见，当 $|x|\le\sqrt{3}$ 时 $\ln(4-x^2)\ge 0$，而当 $\sqrt{3}<|x|<2$ 时 $\ln(4-x^2)<0$。利用对称性，所求面积为

$$2\left[\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x\right].$$

第二个积分是反常积分，因为被积函数在 $x=2$ 处趋向 $-\infty$。我们先积分至 $x=2-\varepsilon$，再令 $\varepsilon\to 0^+$。在第 (i) 部分 $\ln(2-x)$ 的原函数中，代入 $x=2-\varepsilon$ 得

$$-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\to 0,$$

这是根据题中所给“当 $t\to 0$ 时 $t\ln t\to 0$”这一事实。因此上限在该处的贡献为 0，于是

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x &= 0-\Big[-(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\Big]\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2+\sqrt{3},\end{aligned}$$

这里再次用了 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$。另一部分是普通积分:

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= (4\ln 4-4)-\Big[(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})\Big]\\ &= 8\ln 2-2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

相加，得

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3}),$$

其值约为 -0.259：是负数，与预期相符。因此面积为

$$\begin{aligned} &2\Big[\big(4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\big) - \big(8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3})\big)\Big] \\ &\quad = 16\ln(2+\sqrt{3}) - 16\ln 2 + 8 - 8\sqrt{3} \\ &\quad = 16\ln\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Big) + 8 - 8\sqrt{3} \approx 4.125. \end{aligned}$$

验算

- 把 $[0,\sqrt{3}]$ 与 $[\sqrt{3},2]$ 上的两个积分相加，得 $\int_0^2 \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 \approx 1.545$。这个结果亦可直接由第 (i) 部分一行得出，因为在 $x = 0$ 处，两个原函数分别给出 $-2\ln 2 + 2$ 和 $2\ln 2 - 2$，两者互相抵消。
- 第 (iii) 部分的面积是 $4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \approx 1.804$。这比包围该拱形的长方形面积 $\sqrt{3} \times \ln 4 \approx 2.40$ 小，理应如此。
- 对 $\big|\ln|x^2-4|\big|$ 在 $(-2,2)$ 上进行数值积分（numerical integration），得 4.1246，与 $16\ln\big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\big) + 8 - 8\sqrt{3} = 4.12457\ldots$ 吻合。

常见错误

- 忘记曲线在 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 2$ 之间的部分位于轴下方，因而把有向积分加上去，而不是减去。
- 没有把 $\ln(2-\sqrt{3})$ 合并：正是恒等式 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$ 令答案变得简洁。
- 不加说明便直接把 $x = 2$ 代入 $(2-x)\ln(2-x)$：该式在此处并无定义，真正支持取值为 0 的，是极限（limit）$t\ln t \to 0$。

STEP 之外

第 (iv) 部分的积分是一个*反常积分*（improper integral）：被积函数无界，但面积仍然有限，因为对数爆增得极慢，以致 $t\ln t \to 0$。到了大学，你会把这一点严谨化，准确判断对于无界的 g，$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ 何时收敛（converges）（例如，$\int_0^1 t^{-p}\,\mathrm{d}t$ 收敛当且仅当 $p < 1$）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对 $t\ln t \to 0$ 这类极限以及积分的定义都有细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。