详细解答

STEP I 2014，第 12 题

概率与统计 · 离散随机变量

STEP I 2014，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s1-q12

关键思路

平方可以消去绝对值(modulus)符号,因此 $\mathrm{E}(X^2)$ 只需要用到骰子点数 S 的 $\mathrm{E}(S)$ 和 $\mathrm{E}(S^2)$，再对硬币的两种结果取平均。整数条件随即化为一个关于 $(k-1)^2$ 的整除（divisibility）问题，于是只剩下极少数个位数候选值。一旦知道 k，X 只取五个值，而两轮游戏只需简短地枚举（enumeration）所有数对。

解答

求 $\mathrm{E}(X^2)$

设 S 为骰子显示的点数，则

$$\mathrm{P}(S=1)=\tfrac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(S=2)=\tfrac{1}{3},\qquad \mathrm{P}(S=3)=\tfrac{1}{6}.$$

于是

$$\mathrm{E}(S)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{6}=\tfrac{5}{3},\qquad \mathrm{E}(S^2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{9}{6}=\tfrac{10}{3}.$$

硬币是公平（fair）的，且与骰子独立（independent）。由于 $|a|^2=a^2$，在掷得正面的条件下 $X^2=(kS-1)^2$，在掷得反面的条件下 $X^2=(k-S)^2$。所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[(kS-1)^2]+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[(k-S)^2]\\&=\tfrac{1}{2}[k^2\mathrm{E}(S^2)-2k\mathrm{E}(S)+1]+\tfrac{1}{2}[k^2-2k\mathrm{E}(S)+\mathrm{E}(S^2)]\\&=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{10}{3}k^2-\tfrac{10}{3}k+1+k^2-\tfrac{10}{3}k+\tfrac{10}{3}\right]\\&=\frac{13k^2-20k+13}{6}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$k+\frac{13(k-1)^2}{6}=\frac{6k+13k^2-26k+13}{6}=\frac{13k^2-20k+13}{6},$$

所以 $\mathrm{E}(X^2)=k+\frac{13}{6}(k-1)^2$，正如所求。

求 k

由于 k 是整数，$\mathrm{E}(X^2)$ 是整数若且唯若 6 整除 $13(k-1)^2$。因为 13 与 6 互质（coprime），这等同于 $6\mid(k-1)^2$，即 2 和 3 都整除 $(k-1)^2$。由于 2 和 3 是质数（prime），它们各自必须整除 $k-1$ 本身，所以 $6\mid k-1$。在 $1\le k\le 9$ 的范围内，只剩下 $k=1$ 或 $k=7$。

> **想一想** 两个候选值都令 $\mathrm{E}(X^2)$ 为整数。哪个条件排除了其中一个?

是关于 $\mathrm{E}(X)$ 的条件。若 $k=1$，两条规则都给出 $X=|S-1|=S-1$，所以 $\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$，并非整数。

若 $k=7$，则对每一面都有 $7S-1>0$ 及 $7-S>0$，因此可以去掉绝对值符号：

$$\mathrm{E}(X)=\tfrac{1}{2}(7\cdot\tfrac{5}{3}-1)+\tfrac{1}{2}(7-\tfrac{5}{3})=\tfrac{16}{3}+\tfrac{8}{3}=8,$$

而 $\mathrm{E}(X^2)=7+\frac{13}{6}\cdot 36=85$。两者都是正整数，所以 $k=7$。

X 的分布

当 $k=7$ 时，正面给出 $X=7S-1\in\{6,13,20\}$，反面给出 $X=7-S\in\{6,5,4\}$。每个（硬币，骰子）组合的概率为 $\frac{1}{2}\mathrm{P}(S=s)$，而数值 6 既来自正面且 $S=1$，也来自反面且 $S=1$：

x	4	5	6	13	20
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

各概率之和为 1。

两轮游戏

设 X_1、X_2 为两轮的结果。由于每一轮都重新掷骰子和硬币，它们互相独立，且各自服从上述分布（distribution）。我们需要找出和大于 25 及和恰好等于 25 的数对。

> **想一想** 怎样才能不遗漏地列出总和大于 25 的所有数对?

按较大的值分类。若两个结果都不是 20，最大可能总和为 $13+13=26$，而 $13+6=19$ 已经太小，所以 $(13,13)$ 是唯一这样的数对。若其中一个结果是 20，另一个必须大于 5，

即为 6、13 或 20；若它等于 5，总和恰好是 25。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2>25) &= \mathrm{P}(13,13)+2\,\mathrm{P}(20,6)+2\,\mathrm{P}(20,13)+\mathrm{P}(20,20)\\ &= \tfrac{1}{36}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{144}\\ &= \frac{4+12+4+1}{144}=\frac{7}{48},\end{aligned}$$

其中因子 2 计算两种次序。同理

$$\mathrm{P}(X_1+X_2=25)=2\,\mathrm{P}(20,5)=2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}.$$

所以赌客预期获付的金额（以英镑计）为

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}.$$

当这个金额少于 £1 的赌注时，游戏对赌场有利：

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}<1 \iff \frac{7w}{48}<\frac{35}{36} \iff w<\frac{35\cdot 48}{36\cdot 7}=\frac{20}{3}.$$

由于 w 是整数，最大可能值为 $w=6$。又因为 $\frac{20}{3}$ 不是整数，无论是否容许公平游戏（预期获付恰好 £1），答案都相同。

验算

- 由表可得 $\mathrm{E}(X)=\frac{4+10+36+26+20}{12}=8$ 及 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{16+50+216+338+400}{12}=85$，与公式吻合。
- 当 $w=6$ 时，预期获付为 $\frac{7}{8}+\frac{1}{36}=\frac{65}{72}\approx$ £0.90，低于赌注；当 $w=7$ 时为 $\frac{151}{144}\approx$ £1.05，高于赌注。
- 以电脑模拟 2×10^5 局两轮游戏，约 14.5% 的局总和大于 25（$\frac{7}{48}\approx 14.6\%$），约 2.8% 的局总和恰好是 25（$\frac{1}{36}\approx 2.8\%$）。

常见错误

- 在分布中把 $X=6$ 列出两次，一次对应正面、一次对应反面，而没有把它们合并为 $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{2}$。
- 对于像 $(20,6)$ 这样两数不相等的数对，忘记乘以代表两种次序的因子 2。
- 把“总和等于 25”当作赢得 £w 或当作输：赌客只是取回赌注。

STEP 之外

计算 $\mathrm{E}(X^2)$ 的过程是全期望定律（law of total expectation）$\mathrm{E}(Y) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{E}(Y \mid A_i)$ 的一个例子，大学一年级的概率课程经常用到它。两轮游戏涉及独立随机变量（random variables）之和的分布，即卷积（convolution），而生成函数（generating functions）可以简洁地处理这类问题。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）涵盖了这两个概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。