详细解答

STEP I 2014，第 11 题

力学 · 连接滑轮系统

STEP I 2014，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s1-q11

关键思路

对每个质点写出牛顿第二定律（Newton's second law），每条绳各用一个张力（tension），再由绳的约束条件（constraint）得出所有质点的加速度。在系统 II 中，关键在于滑轮（pulley）P_1 是轻的（light）：作用于它的合力必须为零（否则它的加速度会是无限大），所以上面那条绳的张力恰好是下面那条的两倍。确立了这一点之后，P_1 连同其下的两个质点对 M 的作用，就跟单一个质量为 4μ 的质点完全一样。

解答

全题中，质点视为点质量（point mass），绳视为轻而不可伸长（inextensible），滑轮视为光滑（smooth）且轻，因此每条绳上各处的张力相同。

第 (i) 部分

设绳的张力为 T。由于绳不可伸长，若 M 以 a_1 向下加速，则 m 以 a_1 向上加速。对每个质点应用牛顿第二定律，并以运动方向为正方向，得

$$M: \quad Mg - T = Ma_1,$$
$$m: \quad T - mg = ma_1.$$

两式相加，得 $(M-m)g = (M+m)a_1$，所以

$$a_1 = \frac{M-m}{M+m}\,g,$$

得证。代回 m 的方程，

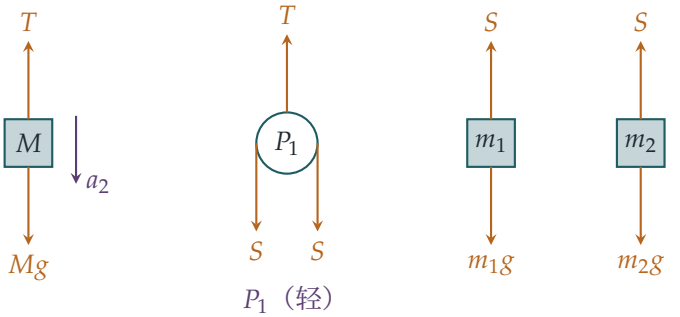
$$T = m(g+a_1) = m\cdot\frac{2M}{M+m}\,g = \frac{2Mmg}{M+m}.$$

绳的两段直线部分都从滑轮铅垂向下伸出，各以张力 T 拉动滑轮，所以张力对滑轮的作用力为

$$2T = \frac{4Mmg}{M+m} \quad ，方向铅垂向下。$$

第 (ii) 部分

设跨过固定滑轮 P 的绳的张力为 T，跨过 P_1 的绳的张力为 S。



轻滑轮。作用于 P_1 的力是向上的 T 和向下的 $2S$（它本身的重量为零）。由于它的质量为零，$T - 2S = 0 \cdot (\text{加速度}) = 0$，所以

$$T = 2S.$$

> ? **想一想** m_1 和 m_2 的加速度与 M 的加速度有甚么关系?

上面那条绳不可伸长，所以若 M 以 a_2 向下加速，则 P_1 以 a_2 向上加速。下面那条绳只决定 m_1 和 m_2 相对于 P_1 的运动：若 m_1 相对于 P_1 以 b 向下加速，则 m_2 相对于 P_1 以 b 向上加速。再加上 P_1 本身的运动，实际的加速度为

$$m_1 : b - a_2 \text{，向下，} \qquad m_2 : b + a_2 \text{，向上.}$$

这里 b 是第二个未知量，稍后会把它消去。

运动方程。

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - 2S = Ma_2, \\ m_1: &\quad m_1 g - S = m_1(b - a_2), \\ m_2: &\quad S - m_2 g = m_2(b + a_2). \end{aligned}$$

把 m_1 的方程除以 m_1，m_2 的方程除以 m_2：

$$g - \frac{S}{m_1} + a_2 = b = \frac{S}{m_2} - g - a_2.$$

因此

$$2(g+a_2) = S\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) = S\,\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} = \frac{S}{\mu},$$

所以 $S = 2\mu(g+a_2)$，而 $T = 2S = 4\mu(g+a_2)$。代入 M 的方程，

$$Mg - 4\mu g - 4\mu a_2 = Ma_2 \quad\Longrightarrow\quad (M+4\mu)a_2 = (M-4\mu)g,$$

因此

$$a_2 = \frac{M-4\mu}{M+4\mu}\,g,$$

得证。与第 (i) 部分比较：M 的表现跟它与单一个质量为 4μ 的质点悬挂在一起时完全相同。

a_1 与 a_2 何时相等？ 对 $x>0$ 设 $f(x) = \dfrac{M-x}{M+x}$，于是 $a_1 = f(m)\,g$，$a_2 = f(4\mu)\,g$。由于

$$f(x) = \frac{2M}{M+x} - 1$$

且 $M>0$，f 在 $x>0$ 上严格递减（strictly decreasing），因此是一对一（one-to-one）的。所以 $a_1 = a_2$ 当且仅当 $m = 4\mu$。由 $m = m_1+m_2$，这变成

$$m_1+m_2 = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} \iff (m_1+m_2)^2 = 4m_1m_2 \iff (m_1-m_2)^2 = 0 \iff m_1 = m_2,$$

其中第一步是乘以 $m_1+m_2>0$，这一步是可逆的。这样便完成了双向的证明。

验算

- 若 $m_1 = m_2$，系统 II 的下半部分平衡，所以 $b=0$：P_1 及其下的质点作为一个质量为 m_1+m_2 的整体运动，系统 II 便化为系统 I。这与此情况下 $4\mu = m_1+m_2$ 相符。
- 若 $m_2 \to 0$，则 $\mu \to 0$ 且 $a_2 \to g$：没有重物牵制 M，因为 m_1 只是自由下落，不承受张力。合理。
- 第 (ii) 部分的张力 $T = 4\mu(g+a_2)$ 也可以从第 (i) 部分得出：若 P_1 固定不动，作用于它的力为 $4m_1m_2g/(m_1+m_2) = 4\mu g$。以 a_2 向上加速，只是把 g 换成 $g+a_2$。
- 数值上，取 $M=3$、$m_1=1$、$m_2=2$，得 $\mu = \frac{2}{3}$ 及 $a_2 = \frac{1}{17}g \approx 0.576\ \mathrm{m\,s^{-2}}$（取 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$）。直接解四条方程也得出相同的值。

常见错误

- 忘记 P_1 会移动，把 m_1 和 m_2 的加速度写成 $\pm b$，而不是 $b-a_2$ 和 $b+a_2$。

- 在轻滑轮两边使用 $T = S$。P_1 每一边都以 S 向下拉，所以它上方的绳必须承受 $2S$。
- 推出 $a_1 = a_2 \Rightarrow m = 4\mu$ 却没有说明理由：这需要 f 是一对一的。

STEP 之外

这个装置是阿特伍德机(Atwood machine)之中再套一部阿特伍德机,而 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ 就是约化质量（reduced mass）——当把行星与其恒星这类二体问题（two-body problem）化为单体问题时，出现的正是同一个量。带有这类约束的系统，用拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）处理最为简洁：它直接使用独立坐标（这里是 P_1 的高度，以及 m_1 相对于 P_1 的位置），完全不需要求张力。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）仔细讲解了滑轮系统，并进而讨论二体问题中的约化质量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。