详细解答

STEP I 2014，第 10 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP I 2014，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s1-q10

关键思路

两部分的做法都一样：自由飞行阶段用能量守恒（conservation of energy），每次碰撞则用牛顿实验定律（Newton's experimental law）。第 (ii) 部分的窍门在于留意到：两球相撞的一刻，大球刚刚反向，而小球仍以全速下落。两者以很大的接近速率（closing speed）相遇，于是较重的下方球可以把较轻的上方球抛到远高于起始位置的高度。之后就只是一道含两条方程的碰撞题，而题目给出的数值令速率之比算得干净利落。

解答

把两球都模型化为沿铅垂方向运动的均匀刚体球（uniform rigid sphere），不计空气阻力，并以 g 表示重力加速度。每次碰撞都是瞬时的，所以碰撞期间重力不会改变任何动量（momentum）。

第 (i) 部分

当球心位于高度 R 时，球便接触地面，因此球已下落了距离 H。由能量守恒，球在碰撞前一刻的速率为

$$u = \sqrt{2gH}.$$

地面固定不动，所以由牛顿实验定律，反弹速率为向上的 eu。之后球上升至速率为零；再次由能量守恒，球再上升

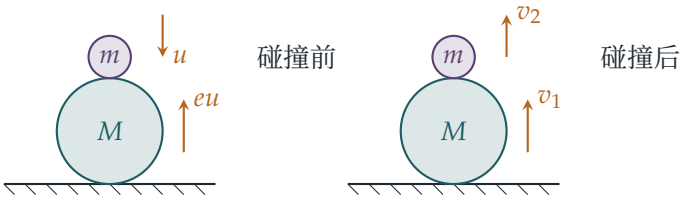
$$\frac{(eu)^2}{2g} = \frac{e^2 \cdot 2gH}{2g} = e^2 H.$$

球心在这段上升开始时位于高度 R，所以它到达离地高度 $R + He^2$，即为所求。

第 (ii) 部分

两球一同由静止开始自由下落，所以在每一时刻速率都相同。下方球的球心下落 H 后到达地面，因此在那一刻两球都以 $u = \sqrt{2gH}$ 向下运动。下方球反弹，如第 (i) 部分一样以向上速率 eu 离开地面；紧接着它与仍以 u 向下运动的上方球相撞。

取向上为正，并设两球相撞后一刻的速度分别为 v_1（质量 M 的球）和 v_2（质量 m 的球）。



由动量守恒（conservation of momentum）得

$$Meu - mu = Mv_1 + mv_2,$$

而由牛顿实验定律（分离速率（speed of separation）等于 e 乘以接近速率（speed of approach），其中接近速率为 $eu + u$）得

$$v_2 - v_1 = e(1+e)u.$$

把 $v_1 = v_2 - e(1+e)u$ 代入动量方程，

$$\begin{aligned}(M+m)v_2 &= Meu - mu + Me(1+e)u \\ &= (Me(2+e) - m)u,\end{aligned}$$

因此

$$v_2 = \frac{Me(2+e) - m}{M+m}\,u.$$

想一想 两球相撞时，小球的球心在哪里?

碰撞紧接在反弹之后发生，所以大球仍然接触地面：其球心位于高度 R，顶部位于 $2R$，而小球的球心位于 $2R + r$。小球由该处再上升 $v_2^2/(2g)$，因此

$$h = 2R + r + \frac{v_2^2}{2g}.$$

代入题目给出的数值，$2R + r = 0.45$，所以 $v_2^2/(2g) = 4.05$；又 $u^2/(2g) = H = 1.8$。两式相除，

$$\frac{v_2^2}{u^2} = \frac{4.05}{1.8} = \frac{9}{4}, \qquad \text{所以} \qquad v_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

这里取正根，因为小球在碰撞后向上运动。

当 $e=\frac{2}{3}$ 时，$e(2+e)=\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{9}$。设 $k=M/m$，并把分子和分母同除以 m，

$$\frac{\frac{16}{9}k-1}{k+1}=\frac{3}{2}\implies \tfrac{32}{9}k-2=3k+3\implies \tfrac{5}{9}k=5,$$

因此

$$\frac{M}{m}=9.$$

验算

- 当 $M/m=9$ 时，得 $v_2=\frac{3}{2}u$ 及 $v_1=v_2-\frac{10}{9}u=\frac{7}{18}u$。碰撞前的动量为 $9m\cdot\frac{2}{3}u-mu=5mu$，碰撞后为 $9m\cdot\frac{7}{18}u+m\cdot\frac{3}{2}u=5mu$。两者相符。
- 由于 $v_1<v_2$，两球在碰撞后分离，这是必然的。
- 以数值计算，$u=\sqrt{2\times 9.8\times 1.8}\approx 5.94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 及 $v_2\approx 8.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，以此速率可上升 $4.05\,\mathrm{m}$，得 $h=4.5$。
- 若 $M\gg m$，则 $v_2\to e(2+e)u$；当 $e=1$ 时为 $3u$，这正是完全弹性“叠球”下落中著名的高度九倍因子。

常见错误

- 只以 $v_2^2/(2g)$ 作为离地的最终高度，忘记碰撞发生时小球的球心位于 $2R+r$。
- 以 $e\cdot 2u$ 或 eu 作为分离速率：接近速率是 $eu+u$，因为两球正相向运动。
- 正负号错误：应固定向上为正，并把上方球在碰撞前的速度记为 $-u$。

STEP 之外

叠球下落是一个很好的示范，展示动量如何被“集中”传到一件较轻的物体上：若把多个球叠成一座塔，每个都比下面的一个轻，最顶的球可被抛到释放高度的许多倍。分析这类碰撞最简洁的方法是使用零动量参考系（zero-momentum frame，即质心参考系（centre-of-mass frame)），在这参考系中，每个球的速度只是反向并乘以 e。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对碰撞及质心参考系有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。