详细解答

STEP I 2014，第 1 题

纯数学 · 平方差

> **STEP I 2014，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q1

关键思路

一切都建基于一个因式分解（factorisation）：$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$。把 n 写成两个平方数之差（difference of two squares），等同于把它写成 $n = de$，其中 $d = a - b$、$e = a + b$；由于 d 与 e 相差偶数 $2b$，两者的奇偶性（parity）必须相同。看清这一点之后，每一部分都会变成关于奇偶性相同的因数对（factor pair）的问题。

解答

全文中，a 与 b 均为非负整数。若 $n = a^2 - b^2$ 且 $n \geq 1$，则 $a > b$，因此我们总可以把一种写法记作 (a, b)，其中 $a > b \geq 0$。

第 (i) 部分

$$3 = 2^2 - 1^2, \quad 5 = 3^2 - 2^2, \quad 8 = 3^2 - 1^2, \quad 12 = 4^2 - 2^2, \quad 16 = 5^2 - 3^2.$$

（对于 16，显而易见的 $4^2 - 0^2$ 并不符合要求，因为平方数必须非零。）

第 (ii) 部分

相邻平方数之差是奇数：$(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$。因此任何奇数 $2m + 1$（其中 $m \geq 0$）都可写成

$$2m + 1 = (m+1)^2 - m^2.$$

第 (iii) 部分

相隔二的平方数之差是 4 的倍数：$(k+1)^2-(k-1)^2=4k$。当 $k\geq 1$ 时，$k+1$ 与 $k-1$ 均为非负，所以

$$4k=(k+1)^2-(k-1)^2.$$

当 $k=0$ 时，直接有 $0=0^2-0^2$（或 1^2-1^2）。

第 (iv) 部分

每个平方数除以 4 的余数都是 0 或 1：$(2m)^2=4m^2$ 及 $(2m+1)^2=4(m^2+m)+1$。因此 a^2-b^2 的余数为

$$0-0=0,\quad 1-1=0,\quad 1-0=1\quad 或\quad 0-1\equiv 3\pmod 4,$$

而永远不会是 2。因此没有任何形如 $4k+2$ 的数是两个平方数之差。

（等价地说：若 $(a-b)(a+b)=4k+2$，则 $a-b$ 与 $a+b$ 的奇偶性相同。两者皆奇，乘积便是奇数；两者皆偶，乘积便可被 4 整除。两种情况都不会得到 $4k+2$。）

第 (v) 部分

设 $pq=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$，其中 $a>b\geq 0$。令 $d=a-b$、$e=a+b$。那么 d 与 e 是正整数，且 $d\leq e$、$de=pq$。反之，任何满足 $d\leq e$ 且 d、e 奇偶性相同的分解 $pq=de$，都恰好给出一种写法，即

$$a=\frac{e+d}{2},\qquad b=\frac{e-d}{2},$$

而它们都是非负整数。所以 pq 的各种写法与这类因数对 (d,e) 一一对应（one-to-one correspondence）。

想一想 为甚么这里的 d 与 e 总是奇偶性相同？又为甚么只有两对？

由于 p 与 q 是奇质数（odd prime），pq 是奇数，所以 pq 的每个因数（divisor）都是奇数，奇偶条件自动成立。取 $p\leq q$。根据唯一分解定理（unique factorisation），满足 $d\leq e$ 的因数对只有

$$(d,e)=(1,pq)\qquad 及\qquad (d,e)=(p,q).$$

（当 $p=q$ 时这仍然成立：p^2 的因数是 1、p 及 p^2。）由此得到

$$pq=\left(\frac{pq+1}{2}\right)^2-\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2\qquad 及\qquad pq=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{q-p}{2}\right)^2.$$

这两种写法是不同的，因为它们的 $d=a-b$ 值分别是 1 和 p，而 $p\geq 3$。所以 pq 恰好有两种方法写成两个平方数之差。例如 $15=8^2-7^2=4^2-1^2$。当 $p=q$ 时，第二种写法是 p^2-0^2，这在此处是容许的，因为只有第 (i) 部分要求平方数非零。

当 $q = 2$ 时，结果不成立。此时 $pq = 2p$，其中 p 是奇数，设 $p = 2m+1$，则 $2p = 4m+2$。根据第 (iv) 部分，$2p$ 根本无法以任何方式写成两个平方数之差。（因数对 $(1, 2p)$ 与 $(2, p)$ 都是一奇一偶。）

第 (vi) 部分

与第 (v) 部分一样，675 的各种写法对应于满足 $d \le e$ 且 d、e 奇偶性相同的因数对 $675 = de$。由于 675 是奇数，它的所有因数都是奇数，所以每个因数对都算数。

现在 $675 = 27 \times 25 = 3^3 \times 5^2$，它有 $(3+1)(2+1) = 12$ 个因数。这些因数按 $d \leftrightarrow 675/d$ 两两配对，而且没有因数与自己配对，因为 675 不是完全平方数（perfect square）（$26^2 = 676$）。所以共有 $12/2 = 6$ 对：

(d, e)	$(1, 675)$	$(3, 225)$	$(5, 135)$	$(9, 75)$	$(15, 45)$	$(25, 27)$
(a, b)	$(338, 337)$	$(114, 111)$	$(70, 65)$	$(42, 33)$	$(30, 15)$	$(26, 1)$

所以 675 恰好有 **6** 种不同的方法写成两个平方数之差。

? **想一想** (a, b) 与 $(-a, b)$，或者 $a^2 - b^2$ 与 $-(b^2 - a^2)$，应否算作不同的写法?

不应该。题目把一切限制于非负整数，而 $a^2 - b^2 = 675 > 0$ 迫使 $a > b$。所以每种写法就是单一一对 (a, b)，其中 $a > b \ge 0$，而这正是我们所数的。

验算

- 抽查表格：$26^2 - 1^2 = 676 - 1 = 675$ 及 $30^2 - 15^2 = 900 - 225 = 675$。
- 第 (ii)–(iv) 部分合起来说明：$n \ge 1$ 是两个平方数之差，当且仅当 $n \not\equiv 2 \pmod 4$。用电脑逐一检查不超过 2000 的每个 n，结果吻合；另外亦验证了对所有奇质数 $p \le q < 200$，pq 恰好有两种表示法，而 $2p$ 则一种也没有。
- 对所有 b 进行搜索，找到 675 恰好有六种表示法，正是表中那六种。

常见错误

- 忘记奇偶条件：例如对 $2p$ 把 $(2, p)$ 这类因数对也算进去，这会给出非整数 $a = \frac{p+2}{2}$。
- 在第 (v) 部分漏掉 $p = q$ 的情况，或在那里排除 $p^2 - 0^2$。除第 (i) 部分外，零是容许的。
- 在第 (vi) 部分数了因数的个数（12），而不是因数对的数目（6）。

STEP 之外

这里的规律——表示法的数目由 n 的因数决定——是初等数论（elementary number theory）中的典型现象。一个著名的近亲是费马（Fermat）的二平方和定理：奇质数可写成 $x^2 + y^2$，当且仅当它是 1 mod 4；这个命题可以利用高斯整数（Gaussian integers）$a + bi$ 简洁地证明。想了解更多，可阅读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。