详细解答

STEP III 2013，第 9 题

力学 · 浮力与简谐运动

> **STEP III 2013，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q9

关键思路

球体浸没在液体中的部分是一个球冠（spherical cap），其体积可以把它切成一片片圆盘求得，这就是旋转体体积（volume of revolution）的计算。之后，题目就是应用牛顿第二定律（Newton's second law），除了重力之外，唯一的力就是浮力（buoyancy）。对于小幅振动，我们设 $x = x_0 + y$，把右边的三次式在平衡位置附近线性化（linearise），再从形如 $\ddot{y} = -\omega^2 y$ 的方程读出 ω^2。

解答

排开的体积

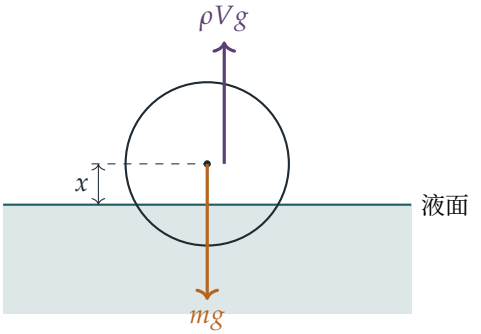
取球心为原点，z 向上量度。液面就是平面 $z = -x$，浸没部分就是球体中 $-R \le z \le -x$ 的部分。这对 $-R < x < R$ 有意义，因此涵盖了题目所述的情况。在高度 z 处，截面是半径为 $\sqrt{R^2 - z^2}$ 的圆盘，所以

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{-x} \pi \left(R^2 - z^2\right) \mathrm{d}z = \pi \left[R^2 z - \tfrac{1}{3} z^3\right]_{-R}^{-x} \\ &= \pi \left(-R^2 x + \tfrac{1}{3} x^3 + R^3 - \tfrac{1}{3} R^3\right) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right), \end{aligned}$$

这就是所求的体积。

运动方程

把球体视为作铅直运动的刚体（rigid body）。由于水缸很大，球体上下浮动时液面不会移动，所以 $\ddot{x}$ 就是球体向上的加速度。球体的质量为 $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\mathrm{s}}$。作用在球体上的力有两个：向下的重量 mg，以及向上的浮力 $\rho V g$。



沿铅直方向分解，以向上为正，

$$m\ddot{x} = \rho V g - mg \quad \Longrightarrow \quad m\left(g + \ddot{x}\right) = \rho g V.$$

代入 m 和 V：

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{s}\left(g + \ddot{x}\right) = \tfrac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

两边乘以 $3/\pi$，得

$$4R^3 \rho_\mathrm{s}\left(g + \ddot{x}\right) = \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

此即所求。

平衡时的密度

在平衡（equilibrium）时 $\ddot{x} = 0$。代入 $x = \frac{1}{2}R$：

$$4R^3 \rho_\mathrm{s} g = \left(2R^3 - \tfrac{3}{2}R^3 + \tfrac{1}{8}R^3\right)\rho g = \tfrac{5}{8}R^3 \rho g,$$

所以

$$\rho_\mathrm{s} = \frac{5}{32}\rho.$$

这个值小于 $\frac{1}{2}\rho$，理应如此：球心在液面之上，所以浸没在液体中的部分少于球体的一半。

小幅振动

设 $f(x) = 2R^3 - 3R^2 x + x^3$，并设 $x = \frac{1}{2}R + y$，其中 y 很小。于是 $\ddot{x} = \ddot{y}$。

> ? **想一想** 怎样把这个三次式变成关于 y 的线性式?

我们把 f 在平衡位置附近展开，只保留一阶项：$f(\frac{1}{2}R + y) = f(\frac{1}{2}R) + f'(\frac{1}{2}R)\,y + O(y^2)$。这里

$$f'(x) = -3R^2 + 3x^2, \qquad f'(\tfrac{1}{2}R) = -3R^2 + \tfrac{3}{4}R^2 = -\tfrac{9}{4}R^2,$$

而由前面的计算，$f(\frac{1}{2}R) = \frac{5}{8}R^3$。利用 $\rho_s = \frac{5}{32}\rho$，运动方程的左边为 $4R^3 \cdot \frac{5}{32}\rho\,(g+\ddot{y}) = \frac{5}{8}R^3\rho\,(g+\ddot{y})$。因此，准确至一阶，

$$\tfrac{5}{8}R^3\rho\,(g+\ddot{y}) = \left(\tfrac{5}{8}R^3 - \tfrac{9}{4}R^2 y\right)\rho g.$$

两边的 $\frac{5}{8}R^3\rho g$ 项互相抵消（这正是平衡条件），剩下

$$\tfrac{5}{8}R^3\ddot{y} = -\tfrac{9}{4}R^2 g\, y \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} = -\frac{18g}{5R}\,y.$$

这是简谐运动（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \dfrac{18g}{5R}$，所以小幅振动的周期（period）为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{18g}}.$$

验算

- 体积：当 $x = R$ 时，公式给出 0（球体刚好接触液面）；当 $x = 0$ 时给出 $\frac{2}{3}\pi R^3$（半个球体）；当 $x = -R$ 时给出 $\frac{4}{3}\pi R^3$（完全浸没）。
- 量纲（dimensions）：$\omega^2 = 18g/(5R)$ 的单位是 s^{-2}，理应如此。
- 数值：取 $R = 1\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，周期约为 $1.06\,\mathrm{s}$。用电脑从一个小位移出发，逐步推进完整的非线性方程，得到的周期与此相同，误差小于万分之一（10^4 分之一）。

常见错误

- 把浸没球冠的高度当作 x 而不是 $R - x$：x 是球心在液面之上的高度。
- 忘记回复力来自 $f'(\frac{1}{2}R)$，而它是负数。这里出现正负号错误会得到 $\ddot{y} = +\omega^2 y$，那根本不是振动。
- 漏掉左边球体本身的质量：与 $\ddot{x}$ 相乘的是 ρ_s，而不是 ρ。（现实中的浮体还会带动周围部分液体一起运动，即所谓“附加质量”（added mass），但题目叫我们忽略这一点。）

STEP 之外

这里所用的方法——把力在平衡位置附近展开并保留线性项——是求任何系统小幅振动的标准方法。线性项的正负号决定稳定性，其大小则决定频率。在大学一年级的课程中，这会发展为 $\ddot{x} = F(x)$ 的线性化，然后在有多个自由度（degrees of freedom）时，进一步研究简正模态（normal modes）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以这个程度讲解了平衡位置附近的小幅振动及流体浮力。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。