详细解答

STEP III 2013，第 8 题

纯数学 · 圆锥曲线的极坐标方程

STEP III 2013，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q8

关键思路

关系式 $r = ks$（其中 $k < 1$）表明 E 是一个以 O 为焦点（focus）、以 D 为准线（directrix）的椭圆（ellipse）；若采用以 O 为中心的极坐标（polar coordinates），它便化为一条以 θ 表示 r 的非常简单的方程。一条经过 O 的弦（chord）其实就是两条方向相反的半径，因此 $1/l$ 会化为一个关于 $\cos^2\theta$ 的简单式子。接着，n 条等距分布的直线把总和转化为一些 $\cos 2\theta$ 项之和，而这正是开首那个求和所处理的。

解答

开首的求和

各项组成一个等比数列（geometric progression），首项为 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$，公比（common ratio）为 $w = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$。由于 $n \geq 2$，角 $2\pi/n$ 位于 $(0, \pi]$ 内，所以 $w \neq 1$，我们可以使用一般的公式：

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha + r\pi/n)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-w^n}{1-w} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}{1-w} = 0.$$

取实部（real part），得 $\sum_{r=0}^{n-1} \cos(2\alpha + 2r\pi/n) = 0$；我们将会用到的正是这个形式。

距离 s

如图所示，从 O 到 D 的垂线起量度 θ。该垂线的垂足与 O 的距离为 d，而 P 在同一方向上与 O 的距离为 $r\cos\theta$，因此当 P 与 O 位于 D 的同一侧时，

$$s = d - r\cos\theta.$$

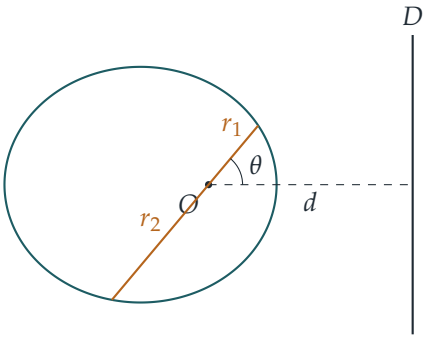
（这对所有 θ 均成立：当 $\cos\theta < 0$ 时，P 比 O 离 D 更远，而公式亦正确地给出 $s > d$。）

E 的极坐标方程

E 上每一点都与 O 位于 D 的同一侧。事实上，若 P 位于另一侧，则有 $s = r\cos\theta - d$，而 $r = ks$ 会给出 $r(1 - k\cos\theta) = -kd < 0$；这是不可能的，因为当 $0 < k < 1$ 时 $1 - k\cos\theta > 0$。因此我们可以用 $s = d - r\cos\theta$，于是 $r = ks$ 变为

$$r = k(d - r\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{kd}{1 + k\cos\theta}.$$

由于 $k < 1$，分母对所有 θ 均为正，所以从 O 出发的每条射线与 E 恰好相交一次。



经过 O 的弦的长度

一条经过 O、与垂线成角 θ 的直线，与 E 相交于方向 θ 及 $\theta + \pi$ 上的两点，而这两点位于 O 的两侧。由于 $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$，弦长为

$$l = \frac{kd}{1 + k\cos\theta} + \frac{kd}{1 - k\cos\theta} = \frac{2kd}{1 - k^2\cos^2\theta}, \qquad \text{因此} \qquad \frac{1}{l} = \frac{1 - k^2\cos^2\theta}{2kd}.$$

留意这只取决于直线本身，而与我们把它的哪一个方向称为 θ 无关。

想一想 我们应如何把 $\cos^2\theta$ 对 n 条直线求和?

利用倍角公式（double-angle formula）$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$：那些 $\cos 2\theta$ 项正好就是开首求和的实部。

对 n 条直线求和

由于相邻直线之间的夹角为 π/n，对某个固定的 α，这 n 条直线所成的角为 $\theta_j = \alpha + j\pi/n$ $(j = 1, \ldots, n)$。这 n 个 $2\theta_j$ 的值是 $2\alpha + 2j\pi/n$；把 $j = n$ 换成 $j = 0$（这只会令 $2\theta_j$ 改变 2π）后，它们正是开首求和中的各个角。因此

$$\sum_{j=1}^{n} \cos^2\theta_j = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \cos 2\theta_j = \frac{n}{2} + 0 = \frac{n}{2},$$

从而

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{l_j} = \frac{1}{2kd}\left(n - k^2 \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{(2-k^2)n}{4kd},$$

这就是所求的结果。条件 $n \geq 2$ 只用过一次，就是用来确保开首求和中 $w \neq 1$。

验算

- 取 $n = 2$、$k = \frac{1}{2}$、$d = 1$，两条直线分别沿着 OD 及垂直于 OD。沿 OD 的弦是长轴（major axis），长度为 $\frac{1/2}{3/2} + \frac{1/2}{1/2} = \frac{4}{3}$；垂直于它的弦（即正焦弦（latus rectum））长度为 $2kd = 1$。所以总和为 $\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$，而公式给出 $\frac{(7/4)\cdot 2}{2} = \frac{7}{4}$。
- 当 $n = 1$ 时，结果并不成立，这是理所当然的：单一条直线的 $1/l$ 取决于它的方向。而 $n = 1$ 正是 $w = 1$ 的情况。
- 我们用电脑对随机的 d、k、n 及 α 直接从 $r = ks$ 求出每条弦作验算，结果与公式吻合；例如 $d = 1$、$k = \frac{1}{2}$、$n = 3$ 时，对任何 α 都得到 $2.625 = \frac{21}{8}$。

常见错误

- 写成 $s = d + r\cos\theta$：在图中 θ 是朝 D 的方向量度的，所以沿 OP 向外移动会令你更接近 D。
- 把弦的另一半再次当作 $kd/(1 + k\cos\theta)$，忘记了相反方向的角是 $\theta + \pi$。
- 直接把角 $\alpha + j\pi/n$ 求和，而不是对 $2\theta_j$ 求和：均匀地绕圆周一圈的是倍角，这正是开首求和中出现因子 2 的原因。

STEP 之外

焦点－准线定义使每一条圆锥曲线（conic）都有极坐标方程 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$，其中 $e < 1$、$e = 1$ 及 $e > 1$ 分别对应椭圆、抛物线（parabola）及双曲线（hyperbola）；当我们解牛顿（Newton）的行星运动方程时，开普勒（Kepler）的轨道正是以这个形式出现。任意两条互相垂直的焦点弦（focal chord）的 $1/l_1 + 1/l_2$ 都相同，这是一个经典性质，而本题的结果正是它的推广。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）便是用这种方法推导轨道方程的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。