详细解答

STEP III 2013，第 7 题

纯数学 · 常微分方程的能量法

STEP III 2013，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q7

本题在 *Beyond STEP* 第 8.2 节不求解而估界中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/bounding-without-solving.html

关键思路

每条方程都像一粒系在弹簧上的质点：一个只依赖于未知函数的“力”项，再加上（在 (ii) 和 (iii) 中）一个与导数（derivative）成正比的摩擦项。将方程乘以导数，就可以把它化成某个“能量”的导数。没有摩擦时，能量守恒；若摩擦从不朝错误方向推动，能量就只会减少，因此永远不会超过其初始值。第 (iii) 部分要求我们自行构造能量，并证明摩擦系数从不为负。

解答

第 (i) 部分

记 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。由链式法则（chain rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2y'y'' + 2y^3y' \\ &= 2y'\left(y'' + y^3\right) = 0,\end{aligned}$$

这里用了微分方程（differential equation）。因此 E 是常数，其值为 $\mathrm{E}(0) = 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^4 = \frac{1}{2}$。故对每个 x，

$$\tfrac{1}{2}y^4 = \tfrac{1}{2} - (y')^2 \le \tfrac{1}{2},$$

因为 $(y')^2 \ge 0$。所以 $y^4 \le 1$，即对所有 x 都有 $|y(x)| \le 1$。

第 (ii) 部分

用同样方法求导，再把方程写成 $v'' + \sinh v = -xv'$ 的形式代入，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2v'v'' + 2\sinh v\, v' \\ &= 2v'\left(v'' + \sinh v\right) \\ &= -2x\,(v')^2.\end{aligned}$$

当 $x \geq 0$ 时，x 与 $(v')^2$ 均非负，所以 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} \leq 0$，正如所求。

因此 E 在 $x \geq 0$ 上非递增（non-increasing），并在该范围内有 $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$。在 $x = 0$ 处，$\cosh(\ln 3) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$，所以 $\mathrm{E}(0) = 0 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$。因此，当 $x \geq 0$ 时，

$$2\cosh v(x) = \mathrm{E}(x) - (v')^2 \leq \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3},$$

故 $\cosh v(x) \leq \frac{5}{3}$。

第 (iii) 部分

仿照 (ii)，我们寻找形如 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ 的能量。于是

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'w'' + F'(w)\,w' = w'\big(2w'' + F'(w)\big),$$

我们希望借助方程，使括号内变成 w' 的倍数。只要 $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$，就能做到这一点。

> **想一想** 哪个 w 的函数的导数是 $w\cosh w + 2\sinh w$?

用分部积分（integration by parts），$\int w\cosh w\,\mathrm{d}w = w\sinh w - \cosh w$，而 $\int 2\sinh w\,\mathrm{d}w = 2\cosh w$。两者相加，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(w\sinh w + \cosh w\right) = \sinh w + w\cosh w + \sinh w = w\cosh w + 2\sinh w.$$

所以我们取

$$\mathrm{E}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\left(w\sinh w + \cosh w\right).$$

记 $g(x) = 5\cosh x - 4\sinh x - 3$，方程即为 $w'' + (w\cosh w + 2\sinh w) = -g(x)\,w'$，所以

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'\left(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\right) = -2g(x)\,(w')^2.$$

> **想一想** $g(x)$ 会不会是负数?

用指数函数表示，

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{5}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)-3 \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-3+\tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-x} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{x}+9\right)=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}-3\right)^{2} \;\geq\; 0 \end{aligned}$$

对每个 x 都成立（只在 $x=\ln 3$ 处等于零）。因此 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}\leq 0$，并且当 $x\geq 0$ 时 $\mathrm{E}(x)\leq \mathrm{E}(0)$。在 $x=0$ 处，$w=0$ 且 $w'=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $\mathrm{E}(0)=\frac{1}{2}+2(0+1)=\frac{5}{2}$。因此，当 $x\geq 0$ 时，

$$2\left(w\sinh w+\cosh w\right)\leq \mathrm{E}(x)\leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{所以} \qquad w\sinh w+\cosh w\leq \tfrac{5}{4}.$$

最后，对每个实数 w 都有 $w\sinh w\geq 0$，因为 w 与 $\sinh w$ 总是同号。略去这一项，便得到当 $x\geq 0$ 时 $\cosh w(x)\leq \frac{5}{4}$，正如所求。

验算

- 在 (ii) 中，这个界在起点处是紧的（sharp）：$\cosh v(0)=\cosh(\ln 3)=\frac{5}{3}$。
- 在 (iii) 中，$g(0)=5-0-3=2$，与因式分解形式所得的 $\frac{1}{2}(1-3)^2=2$ 一致。
- 对每条方程求数值解，都印证了上述图像：在 (i) 中 E 一直保持 0.5；在 (ii) 中 E 从 $\frac{10}{3}$ 开始下降；在 (iii) 中 E 从 2.5 开始下降，而 $\cosh w$ 从不超过约 1.03，远在界 1.25 之内。

常见错误

- 把 $F(w)$ 对 x 求导时，忘记链式法则带来的因子 w'。
- 在 (iii) 中，停在 $w\sinh w+\cosh w\leq\frac{5}{4}$，却没有解释为何 $w\sinh w\geq 0$ 使我们可以略去该项。
- 声称 $g(x)>0$：它在 $x=\ln 3$ 处等于零，所以只有 $\leq$ 成立（而这已足够我们所需）。

STEP 之外

这些能量函数就是*李雅普诺夫函数*（*Lyapunov functions*）：沿着解从不增加的量，可用来在不求解的情况下证明一个系统保持有界或逐渐趋于稳定。同一个想法——能量守恒加上阻尼造成的耗散——正是非线性振子（nonlinear oscillators）稳定性理论的基础。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）在讲述非线性系统与稳定性的一章中介绍了李雅普诺夫方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。