详细解答

STEP III 2013，第 6 题

纯数学 · 复数模的不等式

STEP III 2013，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 5.8 节圆盘中隐藏的距离中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/poincare-disc.html

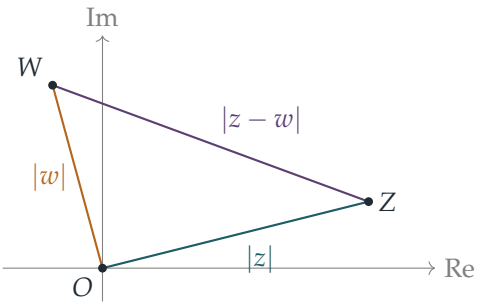
关键思路

一切都建基于把模的平方写成一个数乘以它的共轭（conjugate），即 $|u|^2 = uu^*$。用这个方法展开 $|z-w|^2$ 和 $|1-zw^*|^2$，两者都会出现相同的交叉项（cross terms）$zw^* + z^*w$，这正是同一个量 E 在两式中都出现的原因。一旦把两个模（modulus）都写成“某数的平方减去 E”的形式，最后的不等式就变成比较 $\frac{A-E}{B-E}$ 与 $\frac{A}{B}$ 这两个分数，而这归结为 $B-A$ 的正负号。

解答

三角不等式

在阿冈图（Argand diagram）中标出原点 O，以及代表 z 和 w 的点 Z 和 W。距离 OZ 和 OW 分别是 $|z|$ 和 $|w|$，而距离 WZ 是 $|z-w|$。



线段 WZ 是由 W 到 Z 的最短路径，所以它不会比路径 $W \to O \to Z$ 长：

$$|z-w| = WZ \leq WO + OZ = |w| + |z|.$$

等号成立若且唯若 O 位于线段 WZ 上，即 z 和 w 指向相反方向（或其中一个为 0）。若 O、Z、W 共线（collinear）但 O 不在两者之间，则这个“三角形”是扁平的，但最短路径的论证仍然适用。

第 (i) 部分

利用 $|u|^2 = uu^*$ 及 $(z-w)^* = z^* - w^*$，

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(z^*-w^*) \\ &= zz^* + ww^* - zw^* - z^*w \\ &= |z|^2 + |w|^2 - (zw^* + z^*w). \end{aligned}$$

由于 $|zw| = |z||w|$，我们有 $(|z|+|w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw|$，所以

$$(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| - zw^* - z^*w - 2|zw| = |z-w|^2,$$

得证。移项可得

$$E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2.$$

右方是两个实数的平方之差，所以 E 是实数。根据三角不等式（triangle inequality），$0 \leq |z-w| \leq |z| + |w|$，而把非负的量平方不会改变不等号方向，所以 $E \geq 0$。

（直接计算：z^*w 是 zw^* 的共轭，所以 $E = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw^*|$，这是实数，而且由于 $\mathrm{Re}\, u \geq -|u|$，它至少为 0。）

第 (ii) 部分

同样地，利用 $(zw^*)^* = z^*w$，

$$\begin{aligned}|1 - zw^*|^2 &= (1 - zw^*)(1 - z^*w)\\ &= 1 - zw^* - z^*w + zz^*ww^*\\ &= 1 + |zw|^2 - (zw^* + z^*w)\\ &= \left(1 + 2|zw| + |zw|^2\right) - (zw^* + z^*w + 2|zw|)\\ &= (1 + |zw|)^2 - E,\end{aligned}$$

得证。

最后的不等式

设

$$A = (|z| + |w|)^2, \qquad B = (1 + |zw|)^2,$$

于是第 (i) 及 (ii) 部分表明 $|z - w|^2 = A - E$ 及 $|1 - zw^*|^2 = B - E$。

首先，左方是有意义的：若 $|z| > 1$ 且 $|w| > 1$，则 $|zw^*| = |z||w| > 1$，所以 $zw^* \neq 1$，且 $B - E = |1 - zw^*|^2 > 0$。此外 $B > 0$。

所求不等式的两边都是非负的，所以它等价（equivalent）于两边平方后的不等式

$$\frac{A - E}{B - E} \leq \frac{A}{B}.$$

两边同乘以正数 $B(B - E)$，这等价于

$$(A - E)B \leq A(B - E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B - A) \geq 0.$$

想一想 $B - A$ 的正负号是甚么？关于 $|z|$ 和 $|w|$ 的条件在哪里发挥作用？

设 $a = |z|$ 及 $b = |w|$，

$$B - A = (1 + ab)^2 - (a + b)^2 = 1 + a^2b^2 - a^2 - b^2 = (1 - a^2)(1 - b^2).$$

若 $a > 1$ 且 $b > 1$，两个括号都是负数，所以 $B - A > 0$。由于第 (i) 部分已证 $E \geq 0$，故 $E(B - A) \geq 0$。上面每一步都是等价的，所以

$$\frac{|z - w|}{|1 - zw^*|} \leq \frac{|z| + |w|}{1 + |zw|}.$$

等号成立若且唯若 $E = 0$，即 z 和 w 指向相反方向。

当 $|z|<1$ 且 $|w|<1$ 时

是的，不等式仍然成立。此时 $|zw^*| = ab < 1$，所以同样有 $zw^* \neq 1$ 及 $B - E > 0$，整条等价推导链原封不动地成立。这次 $(1-a^2)(1-b^2)$ 中两个括号都是正数，所以同样有 $B - A > 0$，得到 $E(B-A) \geq 0$，从而得出该不等式。

关键只在于 $1-a^2$ 与 $1-b^2$ 同号。若一个模大于 1 而另一个小于 1，则 $B - A < 0$，不等式可能不成立：取 $z = 2$、$w = 0.4$，左方为 $1.6/0.2 = 8$，而右方为 $2.4/1.8 = \frac{4}{3}$。

验算

- 取 $z = 2$、$w = 2\mathrm{i}$。则 $|z-w| = 2\sqrt{2}$，而 $1 - zw^* = 1 - 2(-2\mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i}$，所以左方为 $2\sqrt{2}/\sqrt{17} \approx 0.686$，右方为 $4/5 = 0.8$。把两者都乘以 $\frac{1}{4}$（$z = \frac{1}{2}$、$w = \frac{1}{2}\mathrm{i}$）会得到同样的两个数，$0.686 \leq 0.8$，这说明了 $|z|, |w| < 1$ 的情况。
- 等号情况：$z = 2 + \mathrm{i}$、$w = -1.5z$ 给出 $E = 0$，两边准确至四位小数都等于 0.6577。
- 用电脑对数十万组随机数对进行检验，证实了两条恒等式、$E \geq 0$，以及两种情况下的不等式。

常见错误

- 写成 $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2zw^*$：交叉项是 $zw^* + z^*w$，两者互为共轭，但一般而言并不相等。
- 交叉相乘前没有检查 $|1 - zw^*| \neq 0$；这里 $|zw| \neq 1$ 保证了这一点。
- 因为推导时用了 $|z|, |w| > 1$ 而在最后一部分回答“否”：因式分解（factorisation）$(1-a^2)(1-b^2)$ 显示，关键只在于正负号是否一致。

STEP 之外

由于 $|1 - zw^*| = |1 - z^*w|$，左方是 $\dfrac{z-w}{1-z^*w}$ 的模。对于固定的 z（其中 $|z| < 1$），映射 $w \mapsto \dfrac{z-w}{1-z^*w}$ 是一个把单位圆盘（unit disc）映到自身的莫比乌斯变换（Möbius transformation），而 $\left|\frac{z-w}{1-z^*w}\right|$ 是 z 与 w 之间的伪双曲距离（pseudo-hyperbolic distance）。本题的不等式表明，这个距离不超过 z 和 w 各自到 0 的距离的“双曲和”：这是三角不等式的一种加强形式，也是双曲几何（hyperbolic geometry）的基础之一。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）以精美的图像解说莫比乌斯变换和双曲圆盘。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。