详细解答

STEP III 2013，第 5 题

纯数学 · 有理性与互质性

STEP III 2013，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q5

关键思路

每一步都只靠一件工具：如果一个数整除一个乘积，而且与其中一个因数互质（coprime），那么它必定整除另一个因数。把有理数（rational number）写成最简分数（lowest terms），消去分母，然后留意每个因数必须落在哪一边。在第 (ii) 部分，这个方法把分母 b 夹在两个事实之间，而除非 b 很小，否则这两个事实不可能同时成立。

我们会反复用到一个小事实：*若 p 与 q 互质，则对任何正整数 s、t，p^s 与 q^t 亦互质*。事实上，若有一个质数（prime）同时整除 p^s 和 q^t，它就会同时整除 p 和 q（整除一个乘积的质数必整除其中一个因数，这正是题目所给结果在 a 为质数时的情况），与互质的假设矛盾。

解答

第 (i) 部分

由 $q^nN = p^n$ 可见 p^n 整除 q^nN。由于 p 与 q 互质，p^n 与 q^n 亦互质，于是由题目所给的结果（取 $a = p^n$、$b = q^n$、$c = N$）得知 p^n 整除 N。因此对某个正整数 k，有 $N = kp^n$，即为所求。

代回原式，得 $q^nkp^n = p^n$，所以 $q^nk = 1$。两者皆为正整数，故 $k = 1$ 且 $q^n = 1$，从而

$$q = 1 \quad (\text{且} N = p^n).$$

现在取任意正整数 n 和 N，并假设 $\sqrt[n]{N}$ 是有理数。它是正数，所以可以写成 $\sqrt[n]{N} = p/q$，其中 p、q 为正整数，且分数为最简形式，即 p 与 q 互质。两边取 n 次方，得 $q^nN = p^n$，而上面的推导给出 $q = 1$。因此 $\sqrt[n]{N} = p$ 是正整数。所以 $\sqrt[n]{N}$ 要么是正整数，要么是无

理数（irrational）。

第 (ii) 部分

已知 $a^a d^b = b^a c^b$，且 $\gcd(a,b) = \gcd(c,d) = 1$。

证明 $d^b = b^a$。由右边可见 b^a 整除 $a^a d^b$。由于 a 与 b 互质，b^a 与 a^a 互质，所以 b^a 整除 d^b。同理，d^b 整除 $b^a c^b$，而 d^b 与 c^b 互质，所以 d^b 整除 b^a。两个互相整除的正整数必定相等：

$$d^b = b^a,$$

再在原方程中约去，亦得 $a^a = c^b$。

若 p 是 d 的一个质因数（prime factor），则 p 整除 $d^b = b^a$，而整除 b 的某个幂的质数必整除 b。所以 p 是 b 的一个质因数。

p 的幂。设 p^m 和 p^n 分别是整除 d 和 b 的 p 的最高次幂，由上一段可知 $m, n \geq 1$。由质因数分解唯一性（unique factorisation），整除 d^b 的 p 的最高次幂是 p^{mb}，而整除 b^a 的则是 p^{na}。由于 $d^b = b^a$，两者相等，所以 $mb = na$，且

$$b = \frac{na}{m}.$$

> **想一想** $b = na/m$ 怎样给出 p^n 的一个上界?

把它改写成 $mb = na$：于是 b 整除 na。但 b 与 a 互质，所以由题目所给的结果，b 整除 n，特别地 $b \leq n$。另外 p^n 整除 b，所以 $p^n \leq b$。合起来，

$$p^n \leq b \leq n.$$

但 $p \geq 2$ 且 $n > 0$，所以由题目给出的事实 $y^x > x$（取 $y = p$、$x = n$）得 $p^n > n$。这个矛盾说明我们的假设不可能成立：d 没有任何质因数。因此 $d = 1$，于是 $b^a = d^b = 1$，从而

$$b = 1.$$

最后部分

设 r 是正有理数，且 r^r 是有理数。把 $r = a/b$ 写成最简形式（a, b 为正整数且互质），并把 $r^r = c/d$ 写成最简形式（由于 $r^r > 0$，c, d 为正整数，且互质）。那么

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} = \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{a} = \left(\frac{c}{d}\right)^{b} \quad \Longrightarrow \quad a^a d^b = b^a c^b,$$

这里把两边取 b 次方，再消去分母。这正好是第 (ii) 部分的情况，所以 $b = 1$，而 $r = a$ 是正整数。

验算

- 整数 r 确实符合条件：$r = 2$ 给出 $r^r = 4$；而结论 $c^b = a^a$ 在 $b = 1$ 时就是 $c = a^a$，理应如此。
- 一个反面例子：$r = \frac{1}{2}$ 给出 $r^r = 1/\sqrt{2}$，是无理数，与结果一致。在第 (i) 部分，$\sqrt[3]{27} = 3$ 而 $\sqrt[3]{24}$ 是无理数：两种情况都会出现。
- 用电脑搜索所有互质的 $a, b \leq 24$、$c < 200$、$d < 60$，只找到 $b = d = 1$ 时 $a^a d^b = b^a c^b$ 的解（即 $a = 1, 2, 3$，且 $c = a^a$）。

常见错误

- 忘记交代为何 p^n 与 q^n 互质：题目所给的结果是关于 a 与 b 互质的，所以你需要那些幂互质。
- 由 $b = na/m$ 直接得出 $p^n \leq n$，却漏了 $b \mid n$ 这一步：正是 a 与 b 互质，才把 $mb = na$ 变成 $b \mid n$。
- 写了 $(a/b)^{a/b} = c/d$，却没有坚持 c/d 是最简形式；没有 $\gcd(c, d) = 1$，$d^b \mid b^a$ 这一步就不成立。

STEP 之外

题目所给的“互质因数”结果就是欧几里得（Euclid）引理（Euclid's lemma），通常由贝祖（Bézout）等式（Bézout's identity）证明，它也是质因数分解唯一性背后的推动力。第一部分是 $\sqrt{2}$ 为无理数这个结果的一般化版本；第二部分则让你初尝超越数论（transcendence theory）的滋味：在这个理论中，格尔丰德–施奈德定理（Gelfond–Schneider theorem）证明了，例如 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 甚至不是代数数（algebraic number）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）把这些基础发展得非常优美。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。