详细解答

STEP III 2013，第 4 题

纯数学 · 单位根的乘积

STEP III 2013，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 5.3 节因式分解 $z^{2n}+1$ 中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/z2n-plus-one.html

关键思路

$z^{2n}=-1$ 的根以共轭（conjugate）对 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ 的形式出现，而每一对相乘都得出一个实系数二次式，由此便得到所需的因式分解（factorisation）。接着，只要选取一个恰当的 z 值，就能把这个因式分解变成一个关于余弦的命题：当 $z=\mathrm{i}$ 时，每个二次式中 z^2+1 的部分都等于零，只剩下 $-2z\cos\theta$ 这一项。在第 (ii) 部分，同样的代入会令两边都等于零，所以我们要先约去在 $z=\mathrm{i}$ 时等于零的那个因式。

解答

因式分解

展开，

$$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) &= z^2 - z\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\ &= z^2-2z\cos\theta+1,\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta$。

现在，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 满足 $z^{2n}=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ 当且仅当 $2n\theta$ 是 π 的奇数倍，即对某整数 k，$\theta=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$。在 $(-\pi,\pi]$ 内的值是

$$\theta=\pm\frac{\pi}{2n},\ \pm\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ \pm\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

因为 $\frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$，而 $\frac{(2n+1)\pi}{2n} > \pi$。这些是 $2n$ 个互不相同的根，所以它们就是 -1 的全部 $(2n)$ 次方根：

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_k}, \qquad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

由于 $z^{2n}+1$ 是 $2n$ 次的首一（monic）多项式（polynomial），而且有这 $2n$ 个互不相同的根，

$$z^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n} (z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k})(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right),$$

这里对每一对共轭根都用了第一个结果。这就是所求的恒等式。

第 (i) 部分

代入 $z = \mathrm{i}$。每个因式变成

$$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta_k + 1 = -2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

而由于 n 是偶数，左边是 $\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1 = 2$。因此

$$2 = (-2\mathrm{i})^n \prod_{k=1}^{n} \cos\theta_k.$$

由于 n 是偶数，$(-2)^n = 2^n$ 而 $\mathrm{i}^n = (\mathrm{i}^2)^{n/2} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$，所以 $(-2\mathrm{i})^n = 2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}$。因此

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}} = (-1)^{\frac{1}{2}n}\, 2^{1-n},$$

这里用了 $1/(-1)^{\frac{1}{2}n} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$。左边的乘积正是 $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$，得证。

第 (ii) 部分

> **想一想** 为甚么不直接把 $z = \mathrm{i}$ 再代入因式分解?

当 n 是奇数时，$\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1 = 0$，所以左边等于零。在右边，中间的值 $k = m$（其中 $m = \frac{1}{2}(n+1)$）给出 $\theta_m = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$，所以该因式是 z^2+1，它在 $z = \mathrm{i}$ 时同样等于零。我们只得到 $0 = 0$，甚么也得不到。解决办法是先从两边约去因式 z^2+1。

利用题目给出的事实和因式分解，

$$(1+z^2)\left(1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2}\right) = (z^2+1) \prod_{k \neq m} \left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right).$$

这些都是多项式，而 z^2+1 不是零多项式，所以我们可以把它约去（多项式除法的结果是唯一的）：

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2} = \prod_{k \neq m} \left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right),$$

这是一个多项式恒等式，对每个 z 都成立，包括 $z = \mathrm{i}$。

现在代入 $z = \mathrm{i}$。在左边，$(-1)^j z^{2j}$ 这一项变成 $(-1)^j(-1)^j = 1$，而共有 n 项（$j = 0, 1, \ldots, n-1$），所以左边等于 n。右边有 $n-1$ 个因式，每个都等于 $-2\mathrm{i}\cos\theta_k$：

$$n = (-2\mathrm{i})^{n-1} \prod_{k \neq m} \cos\theta_k.$$

由于 $n-1$ 是偶数，与第 (i) 部分完全一样，$(-2\mathrm{i})^{n-1} = 2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$。

要把乘积化成平方，可把 k 与 $n+1-k$ 配对。由于

$$\theta_{n+1-k} = \frac{(2n+1-2k)\pi}{2n} = \pi - \theta_k,$$

我们有 $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$。所有 $k \neq m$ 的值可分成 $\frac{1}{2}(n-1)$ 对 $\{k,\, n+1-k\}$，其中 $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(n-1)$，所以

$$\prod_{k \neq m} \cos\theta_k = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(-\cos^2\theta_k\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, P, \qquad P = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \cos^2\theta_k.$$

综合起来，两个符号 $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ 相乘得 $+1$：

$$n = 2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} P = 2^{n-1} P,$$

所以 $P = n\,2^{1-n}$。P 中最后一个因式对应 $k = \frac{1}{2}(n-1)$，即 $\theta_k = \frac{(n-2)\pi}{2n}$，所以 P 正是

$$\cos^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n} = n\,2^{1-n},$$

得证。（当 $n = 1$ 时，乘积是空乘积，等于 $1 = 1 \cdot 2^0$，结果一致。）

验算

- 第 (i) 部分取 $n = 2$：$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2} = (-1)^1 2^{-1}$。当 $n = 4$ 时，乘积是 $\frac{1}{8}$，与 $(-1)^2 2^{-3}$ 吻合。
- 第 (ii) 部分取 $n = 3$：$\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 3 \cdot 2^{-2}$。当 $n = 5$ 时，$\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{3\pi}{10} = 0.3125 = \frac{5}{16}$。
- 两条恒等式亦已用电脑对所有不超过 39 的 n 验证过，而因式分解也在随机选取的复数 z 上测试过。

常见错误

- 在第 (ii) 部分直接把 $z = \mathrm{i}$ 代入因式分解，结果只得到 $0 = 0$。

- 弄错符号：在第 (i) 部分，当 $n \equiv 2 \pmod 4$ 时答案确实是负数，因为对于大于 $\frac{\pi}{2}$ 的那 $\frac{1}{2}n$ 个角，$\cos\theta_k < 0$。
- 忘记 $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$，因而在组成平方时弄错符号。

STEP 之外

同样的技巧——把 $z^N \pm 1$ 按其单位根（roots of unity）作因式分解，再在一个巧妙的点上求值——可以得出一整族乘积公式，例如 $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$（试在 $\frac{z^n-1}{z-1}$ 中代入 $z=1$）。在这类有限乘积中令 $n \to \infty$，便会得到欧拉（Euler）的无穷乘积（infinite product）$\sin\pi x = \pi x \prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$，让你初尝复分析（complex analysis）如何由函数的零点把函数建构出来。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是从几何角度欣赏单位根及这些概念的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。