详细解答

STEP III 2013，第 3 题

纯数学 · 向量与球面

STEP III 2013，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q3

关键思路

一切都源于两个事实：每个 $\mathbf{p}_i$ 都是单位向量（unit vector），而且四者之和为 $\mathbf{0}$。把长度的平方展开为点积（dot product），就能把 $(XP_i)^2$ 化成关于 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$ 的线性（linear）式子；由于 $\sum\mathbf{p}_i=\mathbf{0}$，线性项之和便会全部消去。至于四次方，会剩下一个二次项，因此需要实际的坐标，而这正是第 (ii) 部分所提供的。

解答

点积 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$

由于这是正四面体（regular tetrahedron），六条棱的长度全部相等。对 $i\neq j$，

$$(P_iP_j)^2=(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j)\cdot(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j)=|\mathbf{p}_i|^2+|\mathbf{p}_j|^2-2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j=2-2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j,$$

这里用了 $|\mathbf{p}_i|=1$（每个顶点都在单位球面（unit sphere）上）。因此，棱长相等迫使每个 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$（$i\neq j$）都取同一个值；记这个值为 c。

现在把 $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{p}_1$ 作点积：

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_4=0\quad\Longrightarrow\quad 1+3c=0,$$

所以 $c=-\frac{1}{3}$。即对所有 $i\neq j$，都有 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j=-\frac{1}{3}$，得证。

第 (i) 部分

由于 $|\mathbf{x}|=1$ 亦成立，

$$(XP_i)^2=(\mathbf{p}_i-\mathbf{x})\cdot(\mathbf{p}_i-\mathbf{x})=|\mathbf{p}_i|^2-2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i+|\mathbf{x}|^2=2-2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i.$$

对 i 求和，并利用点积的分配律（distributive law），

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^2 = 8 - 2\,\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4) = 8 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{0} = 8,$$

得证。

第 (ii) 部分

设 $\mathbf{p}_1 = (0,0,1)$ 及 $\mathbf{p}_2 = (a,0,b)$，条件 $\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 = -\frac{1}{3}$ 立即给出 $b = -\frac{1}{3}$。再由 $|\mathbf{p}_2| = 1$ 得

$$a^2 = 1 - b^2 = \tfrac{8}{9}, \qquad \text{所以} \qquad a = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

由于 $a > 0$，取正根。

设 $\mathbf{p}_3 = (u,v,w)$。三个条件把它确定下来：

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} \implies w = -\tfrac{1}{3},$$

$$\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} \implies \tfrac{2\sqrt{2}}{3}u + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{1}{3} \implies u = -\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

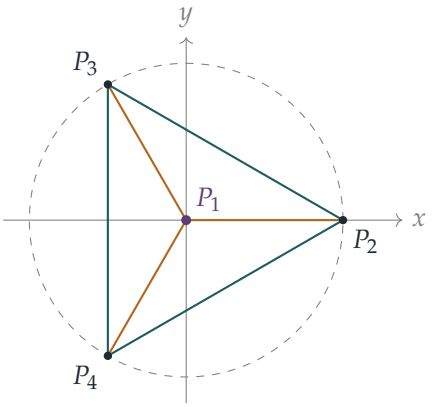
$$|\mathbf{p}_3| = 1 \implies v^2 = 1 - \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{6}{9} \implies v = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$\mathbf{p}_4$ 满足完全相同的方程，所以 P_3 和 P_4 就是由此得出的两个点（它们必须是不同的点，所以各取一个符号）。按其中一种方式标记，

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

（P_3 和 P_4 的标记可以互换。）验证一下：四个位置向量（position vector）之和确实为 $\mathbf{0}$，而且 $\mathbf{p}_3\cdot\mathbf{p}_4 = \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$。

从上方俯视，P_2、P_3、P_4 在平面 $z = -\frac{1}{3}$ 上组成一个等边三角形（equilateral triangle），而 P_1 位于其中心的正上方：



第 (iii) 部分

由第 (i) 部分，$(XP_i)^2 = 2(1 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)$，两边平方，

$$(XP_i)^4 = 4(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\sum_{i=1}^{4}(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2,$$

得证。展开括号，并再次利用 $\sum \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = 0$，

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\Big(4 - 2\sum_{i=1}^{4}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2\Big) = 16 + 4\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2.$$

? **想一想** 线性项又一次消失了。为甚么同一招不能把 $\sum(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2$ 也消掉?

平方和对 $\mathbf{p}_i$ 而言并非线性，所以知道 $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ 并不能直接告诉我们它的值。这正是需要用到坐标的地方。设 $\mathbf{x} = (x, y, z)$，并用第 (ii) 部分的顶点，

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_1 = z, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_2 = \tfrac{1}{3}(2\sqrt{2}\,x - z),$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x + \sqrt{6}\,y - z), \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x - \sqrt{6}\,y - z).$$

平方后相加，合并同类项：

- x^2：$\tfrac{1}{9}(8+2+2) = \tfrac{4}{3}$；　y^2：$\tfrac{1}{9}(6+6) = \tfrac{4}{3}$；　z^2：$1 + \tfrac{1}{9}(1+1+1) = \tfrac{4}{3}$。
- xy 和 yz：这两项只出现在 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3$ 和 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4$ 之中，而这两者只在 y 项的符号上有分别，所以互相抵消。
- xz：$\tfrac{1}{9}\big(-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\big) = 0$。

因此

$$\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \tfrac{4}{3}(x^2+y^2+z^2) = \tfrac{4}{3},$$

因为 X 在单位球面上。所以

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 16 + 4\cdot\tfrac{4}{3} = \frac{64}{3},$$

这与 X 的位置无关，得证。

? **想一想** 我们用了特定的坐标。这个结论对内接于球面的每一个正四面体都成立吗?

成立。任何这样的四面体都可以绕 O 旋转（rotation），使 P_1 转到 $(0,0,1)$，而 P_2 转到半平面 $y = 0$、$x > 0$ 之内；旋转保持长度不变，而当 X 走遍整个球面时，它旋转后的像亦走遍整个球面。所以第 (ii) 部分的坐标并不失一般性。

验算

- 取 $X = P_1$。各距离为 0 及三条棱，每条长 $\sqrt{2-2(-\frac{1}{3})} = \sqrt{8/3}$。于是 $\sum (XP_i)^2 = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8$，而 $\sum (XP_i)^4 = 3 \cdot \frac{64}{9} = \frac{64}{3}$，与两个结果都吻合。
- 取 $X = (0, 0, -1)$，即 P_1 的对径点。此时 $XP_1 = 2$，而其余三个顶点有 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i = \frac{1}{3}$，所以 $(XP_i)^2 = \frac{4}{3}$。这给出 $4 + 3 \cdot \frac{4}{3} = 8$ 及 $16 + 3 \cdot \frac{16}{9} = \frac{64}{3} \approx 21.33$。
- 用电脑在球面上数以千计的随机点上验算，每次都得到 8 和 21.333…。

常见错误

- 断言所有 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ 都相等，却没有说明原因：原因是棱长相等，通过 $(P_iP_j)^2 = 2 - 2\,\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ 得出。
- 忘记 $|\mathbf{x}| = 1$；推导 $(XP_i)^2 = 2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i$ 和最后一步 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 都需要用到这一点。
- 第 (iii) 部分交叉项（cross terms）的计算错误：那里一个符号出错，就会留下对 X 的虚假依赖。

STEP 之外

第 (iii) 部分的核心是恒等式 $\sum_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i)^2 = \frac{4}{3}|\mathbf{x}|^2$，它对每一个向量 $\mathbf{x}$ 都成立。用矩阵（matrix）的语言来说，就是 $\sum_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^{\mathsf{T}} = \frac{4}{3} I$：这四个顶点向量的表现犹如一组超完备的标准正交基（over-complete orthonormal basis），称为紧框架（tight frame）。这一点由对称性必然成立：该矩阵与四面体的每一个旋转都可交换，因此必定是 I 的倍数，而它的迹（trace）是 4。球面上的点集，若其低次平均值与球面本身的平均值相同，便称为球面设计（spherical designs）；它们应用于数值积分（numerical integration）和编码理论（coding theory）。关于背后的线性代数（外积（outer product）、对称矩阵（symmetric matrix）和特征值（eigenvalue）），可参阅斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。