详细解答

STEP III 2013，第 2 题

纯数学 · 麦克劳林级数

STEP III 2013，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s3-q2

关键思路

先写成 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ 以消去平方根，一阶导数（derivative）便轻而易举。再用莱布尼兹法则（Leibniz's rule）对这条一阶方程反复求导，就得到高阶关系式。在 $x = 0$ 处大部分项都消失，剩下一条隔两步的导数递推关系（recurrence relation），由此逐一构造出麦克劳林（Maclaurin）系数。最后的和式看起来正是该级数在一个精心选取的 x 值处的取值。

解答

一阶方程

两边乘开得 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$，然后两边对 x 求导，左边用乘积法则（product rule）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

全式乘以 $\sqrt{1-x^2}$（当 $|x| < 1$ 时不为零），得

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy - 1 = 0,$$

即为所求。

高阶关系式

以 $y^{(k)}$ 表示 $\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$。将一阶方程求导 $n+1$ 次。常数 1 消失，而两个乘积则由莱布尼兹法则处理。由于 $1-x^2$ 的各阶导数依次为 $-2x$、-2，之后是 0，而 x 的导数依次为 1，之后

是 0,

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[(1-x^2)y'\Big] = (1-x^2)y^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}(-2)\,y^{(n)}$$
$$= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2(n+1)x\,y^{(n+1)} - n(n+1)\,y^{(n)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[xy\Big] = x\,y^{(n+1)} + (n+1)\,y^{(n)}.$$

第一式减去第二式并合并同类项,

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2(n+1)+1)x\,y^{(n+1)} - (n(n+1)+(n+1))y^{(n)} = 0,$$

即

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+3)x\,y^{(n+1)} - (n+1)^2 y^{(n)} = 0.$$

以上推导并不需要 $n \geq 1$: 只求导一次($n = 0$)也得到同样的模式 $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$，而我们稍后也会用到这个情况。

麦克劳林级数

代入 $x = 0$。中间一项带有因子 x，因此消失，得

$$y^{(n+2)}(0) = (n+1)^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

这条递推关系每次跨两步，所以需要两个初始值。由定义，$y(0) = \arcsin 0 = 0$；而一阶方程在 $x = 0$ 处给出 $y'(0) - 0 - 1 = 0$，所以 $y'(0) = 1$。

想一想 怎样只凭这两个值得出每一阶导数?

递推关系只把 $y^{(n)}(0)$ 与 $y^{(n+2)}(0)$ 联系起来，所以偶数阶导数组成一条由 $y(0)$ 开始的链，奇数阶导数则组成另一条由 $y'(0)$ 开始的链。

*偶次幂。*由于 $y(0) = 0$，递推关系给出 $y''(0) = 1^2 \cdot 0 = 0$，然后 $y^{(4)}(0) = 0$，如此类推：对每个 k 都有 $y^{(2k)}(0) = 0$。因此 x 的每个偶次幂的系数都是零。(这与 y 是奇函数（odd function）相符，因为它是奇函数 $\arcsin x$ 除以偶函数 $\sqrt{1-x^2}$ 的商。)

*奇次幂。*以 $n = 1, 3, \ldots, 2k-1$ 代入递推关系,

$$y^{(2k+1)}(0) = (2k)^2(2k-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2 \cdot y'(0) = (2 \cdot 4 \cdots 2k)^2 = (2^k\,k!)^2,$$

这对 $k = 0$ 亦成立。除以 $(2k+1)!$ 便得到麦克劳林系数:

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = x + \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{5!}x^5 + \cdots,$$

所以一般奇次项为 $\dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$，而一般偶次项为 $0 \cdot x^{2k}$。

无穷级数之和

和式的第 n 项是 $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$，其中 $n=0$ 给出首项 1。与级数比较，我们想消去因子 2^{2n}，所以选取 x 使 $2^{2n}x^{2n+1}$ 为 1 的常数倍：$x=\frac{1}{2}$ 给出 $2^{2n}(\frac{1}{2})^{2n+1}=\frac{1}{2}$。因此

$$\frac{\arcsin\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

左边等于 $\dfrac{\pi/6}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$，所以

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{2^2}{5!}+\frac{2^2\times3^2}{7!}+\cdots=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

验算

- 将已知级数 $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots$ 乘以 $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$，得 $x+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\cdots=x+\frac{2}{3}x^3+\cdots$，而 $\frac{2^2}{3!}=\frac{2}{3}$ 果然吻合。
- 和式的首五项为 $1+0.16667+0.03333+0.00714+0.00159\approx1.2087$，已经接近 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\approx1.20920$；各项每次大约缩小 4 倍，所以余项很小。

常见错误

- 在莱布尼兹法则中漏掉 $y^{(n)}$ 项上的二项式系数（binomial coefficient）$\binom{n+1}{2}$，以致得不出 $(n+1)^2$。
- 只对 $n\geq1$ 使用递推关系，因而始终没有证明 $y''(0)=0$；偶数链需要 $n=0$（求导一次）的情况。
- 在最后一部分代入 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{4}$：因子 2^{2n} 必须由 x^{2n} 抵消，这迫使 $x=\frac{1}{2}$。

STEP 之外

这里我们“忽略了收敛性的问题”，但大学第一门分析课会把这点严格化：由比值审敛法（ratio test）可知该级数的收敛半径（radius of convergence）为 1，而带余项的泰勒定理（Taylor's theorem with remainder）则证明在该区间内级数确实等于该函数。系数 $\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ 与中心二项式系数（central binomial coefficients）关系密切，而同一个函数积分一次后便可生成 $(\arcsin x)^2$ 的级数。关于幂级数背后的分析，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。