详细解答

# STEP III 2013，第 11 题

力学 · 弹簧与能量

> **STEP III 2013，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q11

## 关键思路

一切都由对称性（symmetry）决定：三角形保持水平，其中心一直位于悬挂点的正下方，而且只能上下移动。因此只需考虑一个质点和一条弹簧，便能掌握整个情况。经过一条弹簧的铅垂平面上的几何关系，给出弹簧长度关于 $\theta$ 的表达式。沿铅垂方向分解力可得平衡（equilibrium）条件，而能量守恒（conservation of energy）（弹性势能、重力势能和动能）则给出速率。

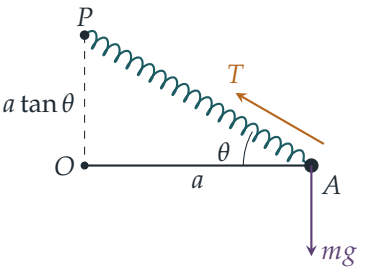
## 解答

### 模型与几何

把各质量视为质点（particle），各杆视为轻而刚性，各弹簧视为轻弹簧并遵守胡克定律（Hooke's law）。设 $P$ 为悬挂点，$O$ 为三角形的中心，位于 $P$ 的正下方。边长为 $s$ 的等边三角形，其中心到顶点的距离为 $s/\sqrt{3}$，所以每个顶点与 $O$ 的水平距离为

$$OA = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} = a$$

取一个顶点 $A$，考虑经过 $P$、$O$ 和 $A$ 的铅垂平面：




弹簧 $PA$ 与水平线 $OA$ 成角 $\theta$，所以弹簧长度为 $a/\cos\theta$，而 $A$ 位于 $P$ 下方 $a\tan\theta$ 的深度。

### 张力

每条弹簧的伸长量（extension）为

$$x = \frac{a}{\cos\theta} - a = \frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

因此由胡克定律，配合弹性模量（modulus）$kmg$ 和自然长度（natural length）$a$，得

$$T = \frac{kmg}{a}\,x = \frac{kmg(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

即所求结果。

### $\theta = \frac{1}{6}\pi$ 时的平衡

作用于 $A$ 处质点的力包括其重量、沿 $AP$ 方向的弹簧张力（tension），以及两条杆施加的力。各杆位于水平面内，所以杆的作用力是水平的。

> ? **想一想** 为甚么可以不理会杆的作用力?

我们沿铅垂方向分解，而杆的作用力没有铅垂分量。（在水平方向上，张力分量 $T\cos\theta$ 由杆的作用力平衡，这正是需要杆的原因，但我们用不着这条方程。）在 $A$ 处沿铅垂方向分解:

$$T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad k(1-\cos\theta)\tan\theta = 1.$$

当 $\theta = \frac{1}{6}\pi$ 时，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$k\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 4\sqrt{3}+6,$$

因为 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$。这就是所求的值。

### 在平衡位置时的速率

由对称性，三角形保持水平，中心位于 $P$ 的正下方，所以三个质点都以相同速率作铅垂运动。除重力和弹簧外，没有其他外力做功，所以能量守恒。伸长量为 $x$ 的弹簧所储存的弹性势能为 $kmg\,x^2/(2a)$。

起始位置（$\theta = \frac{1}{3}\pi$，静止）。此时 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，所以伸长量为 $x_1 = a$，而在 $P$ 下方的深度为 $a\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}a$。

平衡位置（$\theta = \frac{1}{6}\pi$）。伸长量为

$$x_2 = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}, \qquad x_2^2 = \frac{a^2(7-4\sqrt{3})}{3},$$

深度为 $a\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{a}{\sqrt{3}}$。所以每个质点上升了

$$\sqrt{3}a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

三条弹簧释放的弹性势能：

$$\begin{aligned} 3\cdot\frac{kmg}{2a}\left(x_1^2 - x_2^2\right) &= \frac{3kmg}{2a}\cdot\frac{a^2(3-7+4\sqrt{3})}{3} \\ &= 2kmga(\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

由于 $k = 4\sqrt{3}+6$，$k(\sqrt{3}-1) = 12 - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6 = 6 + 2\sqrt{3}$，所以释放的弹性势能为 $4mga(3+\sqrt{3})$。

三个质点增加的重力势能：$3mg\cdot\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,mga$。

两者之差转化为三个质点的动能，每个质点的速率均为 $V$：

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}mV^2 &= 4mga(3+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\,mga = mga\left(12+2\sqrt{3}\right), \\ V^2 &= \frac{2ag}{3}\left(12+2\sqrt{3}\right) = \frac{4ag}{3}\left(6+\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

即所求结果。

## 验算

- 正负号：在 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 时，每条弹簧的铅垂拉力为 $T\sin\theta = kmg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 11.2\,mg > mg$，所以三角形起初确实是向上朝平衡位置移动，与能量方程的假设一致。
- 答案为正数，而且具有速率平方的单位（$ag$）。
- 取 $a = 1.3\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，由 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 的静止状态出发，以数值方法逐步推进运动方程 $\ddot{y} = g - \frac{T}{m}\sin\theta$，在 $\theta = \frac{1}{6}\pi$ 时得 $V^2 \approx 131.48\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$，与 $\frac{4ag}{3}(6+\sqrt{3})$ 吻合。

## 常见错误

- 把中心到顶点的距离误当作 $\sqrt{3}a$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，而不是 $a$。
- 忘记共有三条弹簧和三个质点：因数 3 同时出现在弹性势能、重力势能和动能各项中。
- 弄错运动方向：质点在两个位置之间是上升的，所以重力势能是增加，而不是减少。

## STEP 之外

在这里，三角形只有一个自由度（degree of freedom），因为对称性排除了所有其他运动。选取单一坐标（这里是 $\theta$，或深度 $y$），并以它表示能量，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点。把势能在平衡位置附近展开，还可以求得微小铅垂振动的周期。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）便是本着这种精神，发展能量方法和小振动（small oscillations）的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。