详细解答

STEP III 2013，第 10 题

力学 · 转动撞击

STEP III 2013，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

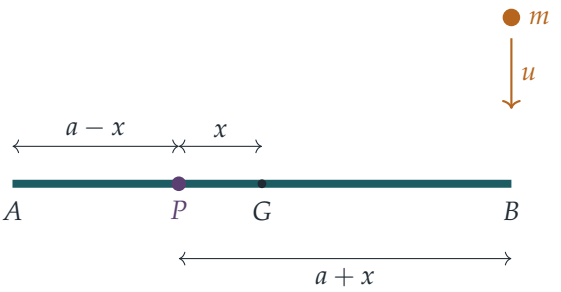
step.maths.org/questions/13-s3-q10

关键思路

只要留意到杆的中点与 P 相距多远，转动惯量（moment of inertia）便可直接由平行轴定理（parallel axis theorem）得出。至于撞击，转轴会对杆施加一个大小未知的冲量（impulse），因此线动量（linear momentum）并不守恒；但该冲量作用于 P，所以它对 P 的力矩为零。对 P 的角动量守恒（conservation of angular momentum），再加上在 B 处应用牛顿（Newton）实验定律（Newton's experimental law），便得到两条方程，足以求出两个未知量。

解答

我们把杆视为均匀刚性杆，把质点视为质点，并假设撞击在瞬间完成，因此唯一的水平冲量来自 B 处和转轴处（重力等有限大小的力在撞击的一瞬间不产生冲量）。



转动惯量

设 G 为杆的中点，即其质心（centre of mass）。由于 $AG = a$ 及 $AP = a - x$，距离 PG 为 x（当 $x > 0$ 时，G 位于 P 靠 B 的一侧）。均匀杆对通过其中心的垂直轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}Ma^2$（杆长为 $2a$）。由平行轴定理，

$$I_P = \tfrac{1}{3}Ma^2 + Mx^2 = \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2),$$

与所求相符。

如果你喜欢从基本原理出发：线密度（line density）为 $M/(2a)$，以 s 表示沿杆从 P 量起的距离，则杆由 $s = -(a - x)$ 延伸至 $s = a + x$，而

$$I_P = \frac{M}{2a}\int_{-(a-x)}^{a+x} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{M}{6a}[(a+x)^3 + (a-x)^3] = \frac{M}{6a}(2a^3 + 6ax^2),$$

结果相同。

撞击

由 P 到 B 的距离为 $2a - (a - x) = a + x$。设 v 为质点在撞击后瞬间的速度（以原来的运动方向为正），ω 为杆的角速度（angular velocity），于是 B 此时以速率 $(a + x)\omega$ 沿同一方向运动。

> **想一想** 为甚么这里不能用线动量守恒?

因为转轴是固定的，它在碰撞期间对杆施加一个大小未知的冲量。该冲量作用于 P，所以它对 P 的力矩为零。质点与杆之间的冲量是杆与质点所组成系统的内部冲量。因此，系统对 P 的总角动量守恒：

$$mu(a + x) = mv(a + x) + I_P\,\omega. \tag{1}$$

在 B 处应用牛顿实验定律（分离速率等于 e 乘以接近速率），得

$$(a + x)\omega - v = eu. \tag{2}$$

由 (2)，$v = (a + x)\omega - eu$。代入 (1)，

$$\begin{aligned} mu(a + x) &= m(a + x)[(a + x)\omega - eu] + I_P\,\omega \\ mu(1 + e)(a + x) &= [m(a + x)^2 + \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2)]\omega. \end{aligned}$$

两边乘以 3，

$$\omega = \frac{3mu(1 + e)(a + x)}{M(a^2 + 3x^2) + 3m(a + x)^2},$$

即题目所给的结果。

$m = 2M$ 的情况

代入 $m = 2M$ 并约去 M：

$$\omega = \frac{6u(1+e)(a+x)}{a^2+3x^2+6(a+x)^2}.$$

自然出现的变量是力臂（lever arm）$s = a + x$，即距离 PB，它的取值范围是 $[0, 2a]$。以 $x = s - a$ 代入，分母为

$$a^2 + 3(s-a)^2 + 6s^2 = 9s^2 - 6as + 4a^2,$$

所以

$$\omega = \frac{6u(1+e)\,s}{9s^2 - 6as + 4a^2}.$$

当 $s = 0$（转轴位于 B）时 $\omega = 0$，所以最大值出现在 $s > 0$ 处，此时可把分子分母同除以 s：

$$\omega = \frac{6u(1+e)}{9s + \dfrac{4a^2}{s} - 6a}.$$

我们要令分母尽可能小。由于 $s > 0$，算术—几何平均不等式（AM–GM inequality）给出

$$9s + \frac{4a^2}{s} \;\geq\; 2\sqrt{9s \cdot \frac{4a^2}{s}} = 12a,$$

等号成立当且仅当 $9s = 4a^2/s$，即 $s = \frac{2}{3}a$，而这确实落在 $(0, 2a]$ 之内。因此分母至少为 $12a - 6a = 6a$，且只在 $s = \frac{2}{3}a$ 时取等号，故

$$\omega \leq \frac{6u(1+e)}{6a} = \frac{u(1+e)}{a}.$$

所以最大角速度为 $u(1+e)/a$，在 $a + x = \frac{2}{3}a$ 时达到，即

$$x = -\tfrac{1}{3}a.$$

负号只是表示 P 位于中点靠 B 的一侧：P 与 A 相距 $\frac{4}{3}a$，与 B 相距 $\frac{2}{3}a$。

验算

- 当 $x = a$（转轴位于 A）且 $e = 1$ 时，公式给出 $\omega = 3mu/\big(a(M+3m)\big)$；令 $M \to 0$，得 $\omega = u/a$，于是 B 以 $2u$ 运动，这正是极轻的“靶子”受弹性撞击时大家熟悉的结果。
- 在最佳情况下取 $a = 1$、$u = 1$、$e = \frac{1}{2}$，杆以 $\omega = 1.5$ 转动，所以 B 以 1 运动，而质点在撞击后的速度为 $v = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。此时对 P 的角动量为 $2M \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}M\big(1 + \frac{1}{3}\big) \cdot 1.5 = \frac{4}{3}M$，与撞击前的 $2M \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$ 相符。
- 以电脑在 $x \in [-a, a]$ 上作细密搜索，确认最大值出现在 $x = -a/3$。

常见错误

- 使用线动量守恒：固定的转轴会产生冲量，所以只有对 P 的角动量守恒。
- 把距离 PB 当作 $a - x$ 或 $2a - x$，而不是 $a + x$。
- 因 $x = -\frac{1}{3}a$ 是负数而舍弃它：x 是带正负号的位置，任何 $[-a, a]$ 内的 x 都会使 P 落在杆上。

STEP 之外

选择适当的点来取力矩，使未知的反作用力消去，是刚体动力学（rigid-body dynamics）中最有用的技巧之一；它在“撞击中心”（centre of percussion）中再次出现——那是球棒或杆上的一点，打击该点时，支点处不会产生冲量。大学一年级的力学会把这发展成角动量和惯性张量（inertia tensor）的一般理论。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对冲击性转动和撞击中心有非常清晰的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。