详细解答

STEP III 2013，第 1 题

纯数学 · 半角代换

> **STEP III 2013，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q1

关键思路

半角代换（half-angle substitution）$t = \tan\frac{1}{2}x$ 可把任何 $\sin x$ 的有理函数（rational function）化为 t 的有理函数，因此第一个积分会变成 $\int \mathrm{d}t/(\text{二次式})$，再用配方法（completing the square）即可完成。要把答案写成题目要求的形式，则需要用到 $\tan(A-B)$ 公式。至于 I_n，提示的设计正是要令那个麻烦的分母约去：$\sin^{n+1}x + 2\sin^n x = \sin^n x\,(2+\sin x)$。由此得到一条递推关系（recurrence），从 I_0 开始逐级往上推；而 I_0 是唯一真正需要用到第一部分结果的积分。

解答

代换

设 $t = \tan\frac{1}{2}x$，由连锁法则（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1+\tan^2\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}(1+t^2).$$

至于正弦，先用二倍角公式（double-angle formula），再写成 $\cos^2\frac{1}{2}x = 1/\sec^2\frac{1}{2}x$：

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = 2\tan\tfrac{1}{2}x\cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

两个结果均已证明。

第一个积分

当 x 由 0 变到 $\frac{1}{2}\pi$ 时，t 由 $\tan 0 = 0$ 变到 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，而且 $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$。此外

$$1 + a\sin x = \frac{1 + t^2 + 2at}{1 + t^2},$$

因此因子 $1 + t^2$ 互相约去，得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a\sin x} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2 + 2at + 1} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+a)^2 + (1-a^2)}.$$

由于 $0 < a < 1$，常数 $1 - a^2$ 为正；记 $r = \sqrt{1-a^2}$。利用 $\int \mathrm{d}u/(u^2 + r^2) = \frac{1}{r}\arctan\frac{u}{r}$，

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a\sin x} = \frac{2}{r}\Big[\arctan\frac{t+a}{r}\Big]_0^1 = \frac{2}{r}(\alpha - \beta),$$

其中

$$\tan\alpha = \frac{1+a}{r} = \frac{1+a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}, \qquad \tan\beta = \frac{a}{r},$$

且 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$。

> **想一想** 这看来不像我们想要的答案。怎样才能把两个反正切之差化为一个反正切?

取差的正切。我们有

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{(1+a) - a}{r} = \frac{1}{r}, \qquad 1 + \tan\alpha\tan\beta = 1 + \frac{a(1+a)}{1-a^2} = 1 + \frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

所以

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1-a}{r} = \frac{1-a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}.$$

在取反函数之前，我们需要 $\alpha - \beta$ 位于 arctan 的值域 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之内。事实确是如此：两个角都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内，而且 $\tan\alpha > \tan\beta$（两者之差为 $1/r > 0$），所以 $0 < \alpha - \beta < \frac{1}{2}\pi$。因此 $\alpha - \beta = \arctan\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}$，并且

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a\sin x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}},$$

此即所求。

计算 I_3

按照提示，

$$I_{n+1} + 2I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^n x\,(\sin x + 2)}{2 + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

我们需要右方在 $n = 0, 1, 2$ 时的值：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\pi.$$

想一想 递推关系把每个 I_n 与下一个联系起来，但它从哪里开始？

我们需要另行求出 I_0，这正是第一部分派上用场的地方。提出因子 2 并取 $a = \frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned} I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{2}\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3/4}} \arctan\frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3/2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

现在沿递推关系 $I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x - 2I_n$ 逐级往上推：

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2}\pi - 2I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_2 &= 1 - 2I_1 = 1 - \pi + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_3 &= \tfrac{1}{4}\pi - 2I_2 = \frac{\pi}{4} - 2 + 2\pi - \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

因此

$$I_3 = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{9} - 2.$$

验算

- 当 $a \to 0$ 时，第一个结果应给出 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$；它的确趋向 $2\arctan 1 = \frac{1}{2}\pi$。
- 由于在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上 $0 \le \sin^3 x/(2+\sin x) \le \frac{1}{3}$，我们需要 $0 < I_3 < \frac{1}{6}\pi \approx 0.52$。我们的答案是 $I_3 \approx 0.2318$，而 I_3 的数值积分结果与之在许多位小数上吻合。同样，$I_0 = \pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$，它理应介乎 $\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 之间，事实亦然。
- 各值递减，$I_0 > I_1 > I_2 > I_3 > 0$，这是应有的结果，因为在该区间上 $0 \le \sin x \le 1$。

常见错误

- 忘记把积分上下限改为 $t = 0$ 和 $t = 1$，或忘记 $\mathrm{d}x$ 带来的因子 $2/(1+t^2)$。
- 用 $\tan(\alpha - \beta)$ 推断 $\alpha - \beta = \arctan(\dots)$，却没有检查 $\alpha - \beta$ 是否位于 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之内。

- 以 $a = 2$ 把第一个结果套用于 I_0：该结果只在 $0 < a < 1$ 时成立，所以必须先提出因子 2。

STEP 之外

$t = \tan\frac{1}{2}x$ 代换（常称为魏尔斯特拉斯代换（Weierstrass substitution））说明了每个 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的有理函数都有初等的原函数（antiderivative），因为部分分式（partial fractions）可以处理任何 t 的有理函数。从几何角度看，它就是单位圆的球极投影参数化（stereographic parametrisation），$(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$，而由有理数 t 出发，它亦能产生所有毕氏三元数组（Pythagorean triple）。像 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x/(1 + a\sin x)$ 这类积分，亦是复分析（complex analysis）中围道积分（contour integration）的经典入门应用；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是理解个中原因的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。