详细解答

STEP II 2013，第 9 题

力学 • 平衡中的摩擦力

> **STEP II 2013，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q9

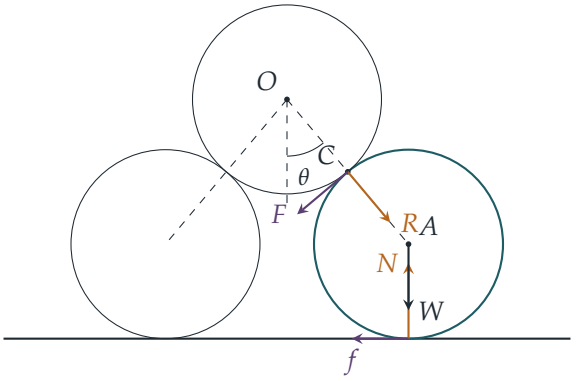
关键思路

大部分工作都由对称性（symmetry）完成。把三个圆盘当作一个整体系统，立即就能得出地面的反作用力。然后对其中一个底部圆盘的圆心取力矩（moments）：地面的摩擦力（friction）和顶部圆盘施加的摩擦力都沿切线（tangent）方向作用，因此两者的力臂（lever arm）相同（都是半径），大小必然相等。知道这一点后，分别对底部圆盘和顶部圆盘分解力（resolving forces），便得到两条方程，可解出两个未知数。

解答

我们把各圆盘视为全同的均匀刚体（rigid body）圆盘，半径为 r，重量各为 W，全部位于同一铅直平面内。设 O 为顶部圆盘的圆心，A 为右边底部圆盘的圆心，则 $OA = 2r$，且 OA 与向下的铅直线成角 θ。这两个圆盘的接触点 C 是 OA 的中点。

由左右对称可知，左边底部圆盘所受的力与右边圆盘所受的力互为镜像，所以我们只需处理右边的圆盘。在 C 点，右边圆盘受到沿 OA 方向的法向反作用力（normal reaction）R（把它推离 O），以及沿公切线方向的摩擦力 F。在地面上，它受到法向反作用力 N 和摩擦力 f。



图中显示右边底部圆盘所受的力。根据牛顿（Newton）第三定律（Newton's third law），顶部圆盘在 C 点受到方向相反的 R 和 F，因此摩擦力沿切线把顶部圆盘向上及向外推。

第 (i) 部分

把三个圆盘合起来视为一个系统。圆盘之间的力是内力，会互相抵消，所以仅有的外力是三个重量和地面施加的力。由对称性，两个地面反作用力相等，而地面的摩擦力是水平的，因此铅直方向分解力得

$$2N = 3W \quad \Longrightarrow \quad N = \tfrac{3}{2}W,$$

得证。

第 (ii) 部分

想一想 底部圆盘上似乎有三个未知数 R、F 和 f。第三条方程从何而来?

来自力矩。对右边底部圆盘关于 A 取力矩。重量 W、法向反作用力 N 和法向反作用力 R 都通过 A，所以没有力矩。摩擦力 f 沿最低点的切线作用，F 沿 C 点的切线作用，所以两者的力臂都是 r。它们必须使圆盘向相反方向转动，因此

$$fr = Fr \quad \Longrightarrow \quad f = F.$$

（这也确定了图中各力的方向。圆盘被向外推，所以 f 指向内，于是底部圆盘上的 F 必须沿切线指向下方及内侧，才能平衡 f 的力矩。）

由 O 到 A 的单位向量是 $(\sin\theta, -\cos\theta)$，而底部圆盘上 F 的切线方向是 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$。对底部圆盘水平方向分解力：

$$R\sin\theta - F\cos\theta - f = 0 \quad \Longrightarrow \quad R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

其中用了 $f = F$。

对顶部圆盘而言，两个接触点提供相等的向上分量，各为 $R\cos\theta + F\sin\theta$。铅直方向分解力：

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = W.$$

代入 $F = \dfrac{R\sin\theta}{1+\cos\theta}$：

$$W = 2R\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2R\cdot\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = 2R\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = 2R.$$

所以两个互相接触的圆盘之间的法向反作用力是

$$R = \tfrac{1}{2}W,$$

且与 θ 无关。于是

$$F = \frac{R\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{W\sin\theta}{2(1+\cos\theta)},$$

这就是所求的摩擦力。

作为一致性检查，对底部圆盘铅直方向分解力得 $N = W + R\cos\theta + F\sin\theta = W + \frac{1}{2}W = \frac{3}{2}W$，与第 (i) 部分吻合。

第 (iii) 部分

利用半角公式（half-angle formulae）$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ 及 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$，

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

要达到平衡（equilibrium），每个接触点的摩擦力都不能超过其极限值（limiting value）。在圆盘之间，这表示 $F \le \mu R$，即

$$\tan\tfrac{\theta}{2} \le \mu.$$

（在地面上，我们需要 $f \le \mu N$，即 $\frac{1}{2}W\tan\frac{\theta}{2} \le \frac{3}{2}\mu W$。这个条件较弱，所以起决定作用的是圆盘之间的接触。）

> ? **想一想** 是甚么阻止 θ 任意地小，从而令 $\tan\frac{\theta}{2}$ 变得极小?

两个底部圆盘并不接触。它们的圆心相距 $2\cdot 2r\sin\theta = 4r\sin\theta$，而这必须大于 $2r$，所以 $\sin\theta > \frac{1}{2}$。由于 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，这表示 $\theta > \frac{\pi}{6}$，所以 $\frac{\theta}{2} > \frac{\pi}{12}$。由于 tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上递增，

$$\tan\tfrac{\theta}{2} > \tan\tfrac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

所以平衡要求 $\mu \ge \tan\frac{\theta}{2} > 2-\sqrt{3}$。若 $\mu < 2-\sqrt{3}$，则没有任何容许的 θ 值能满足此条件，平衡不可能出现。

验算

- 当 $\theta \to 0$ 时，顶部圆盘正正坐在其他圆盘之上，而 $F \to 0$：不需要摩擦力，与预期一致。
- 取任何样本角度，例如 $\theta = 1$ 弧度，代入 $R = \frac{1}{2}W$、$F = f = \frac{1}{2}W\tan\frac{1}{2}$ 及 $N = \frac{3}{2}W$，每个圆盘的两个力分量和力矩都平衡。
- $2 - \sqrt{3} \approx 0.2679$，与 $\tan 15^\circ \approx 0.2679$ 吻合。对略大于 30° 的 θ 作数值扫描，证实 $\mu = 0.2679$ 时平衡不可能，而 $\mu = 0.268$ 时平衡可能。

常见错误

- 假设圆盘之间的摩擦力为零，或完全忘记它。没有它的话，底部圆盘的力矩方程会迫使 $f = 0$，那就没有东西能阻止底部圆盘向两边滑开。
- 遗漏了底部圆盘互不接触这个条件。它是唯一给 θ 设下限的条件，因此 $2 - \sqrt{3}$ 正是由此而来。
- 弄错 F 的方向。应利用关于 A 的力矩方程来确定方向，而不是靠猜。

STEP 之外

这个问题之所以是静定（statically determinate）的，全靠对称性和力矩方程；在许多由粗糙物体堆叠而成的情况中，单凭平衡条件无法求出摩擦力，工程师需要为物体的形变建立模型。简洁的结果 $F/R = \tan\frac{\theta}{2}$ 是摩擦角（friction angle）概念的一个例子：当且仅当总接触力与法线所成的角不超过 $\arctan\mu$ 时，平衡才可能出现。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）在大学一年级程度上仔细讨论了摩擦力和刚体静力学。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。