详细解答

STEP II 2013，第 8 题

纯数学 · 微积分与不等式

STEP II 2013，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q8

关键思路

由于 f 是递减（decreasing）函数，这个区域是一道越往右越低的“楼梯”，所以最佳的矩形会位于左下角：底边在直线 $y = \mathrm{f}(t)$ 上，左边贴着 y 轴，而右上角落在曲线上。这样第 (i) 部分就化为求单变量函数的最大值（maximum）。第 (ii) 部分比较两个面积，即整个区域与其内的矩形；而第 (iii) 部分只是把 $\mathrm{f}(x) = 1/(1+x)$ 代入，把一切具体算出来。

解答

第 (i) 部分

该区域是 $\{(x,y) : 0 \le x \le t,\ \mathrm{f}(t) \le y \le \mathrm{f}(x)\}$：由于 f 递减，当 $x < t$ 时曲线位于直线 $y = \mathrm{f}(t)$ 之上。

取区域内任意一个矩形 $[a,b] \times [c,d]$。它的底边必须满足 $c \ge \mathrm{f}(t)$，左边满足 $a \ge 0$，而右上角 (b,d) 必须在区域内，所以 $b \le t$ 及 $d \le \mathrm{f}(b)$。因此其面积至多为

$$b(\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(t)),$$

而矩形 $[0,b] \times [\mathrm{f}(t), \mathrm{f}(b)]$ 正好达到这个面积，并且确实放得进区域：对于 $0 \le x \le b$，有 $\mathrm{f}(x) \ge \mathrm{f}(b)$，所以该矩形位于曲线之下。于是

$$A_0(t) = \max_{0 \le x \le t} R(x), \qquad R(x) = x(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)).$$

由于 $R(0) = R(t) = 0$，而对于 $0 < x < t$ 有 $R(x) > 0$，所以当 $t > 0$ 时，最大值在某个内点 $x_0 \in (0,t)$ 取得，而该点满足 $R'(x_0) = 0$：

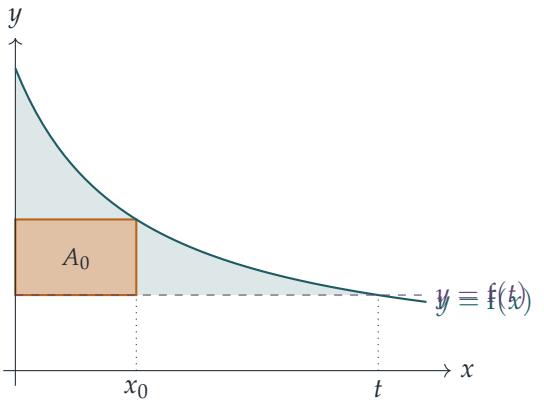
$$R'(x) = \mathrm{f}(x) + x\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0\mathrm{f}'(x_0) + \mathrm{f}(x_0) = \mathrm{f}(t).$$

因此 $A_0(t) = x_0(\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(t))$，其中 x_0 满足上述条件，得证。（当 $t = 0$ 时，区域没有宽度，$A_0(0) = 0$，而 $x_0 = 0$ 显然满足该条件。）

第 (ii) 部分

记 $t\,\mathrm{g}(t) = \int_0^t \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$。两边求导，左边用乘积法则（product rule），右边用微积分基本定理（fundamental theorem of calculus），得

$$\mathrm{g}(t) + t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) \quad \Longrightarrow \quad t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t).$$



积分 $\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x$ 正是阴影区域的面积，即 $0 \le x \le t$ 范围内曲线与直线 $y = \mathrm{f}(t)$ 之间的面积。第 (i) 部分的最佳矩形位于这个区域之内，但并未填满它：当 $x_0 < x < t$ 时，矩形没有任何贡献，但由于 f 严格递减（strictly decreasing），区域在该处的高度为 $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t) > 0$。所以那一窄条的面积是正数，因此

$$\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x > A_0(t).$$

想一想 怎样把左边化成与 g' 有关的式子?

把积分拆开，利用 g 的定义，再用刚证明的结果：

$$\begin{aligned}\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x &= t\,\mathrm{g}(t) - t\,\mathrm{f}(t)\\ &= -t\big(\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t)\big)\\ &= -t \cdot t\,\mathrm{g}'(t) = -t^2\mathrm{g}'(t).\end{aligned}$$

因此 $-t^2\mathrm{g}'(t) > A_0(t)$。

第 (iii) 部分

这里 $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x\geq 0$ 时为正且严格递减，所以以上所有结果都适用。

左边。由第 (ii) 部分最后的计算，

$$-t^2\mathrm{g}'(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{1+x}-\frac{t}{1+t}=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}.$$

矩形。由 $\mathrm{f}'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，

$$x\mathrm{f}'(x)+\mathrm{f}(x)=\frac{-x+(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2},$$

所以 x_0 的条件是 $(1+x_0)^2=1+t$。记 $s=\sqrt{1+t}$，则 $s>1$ 且 $x_0=s-1$（取正根 (root)；留意 $0<x_0<t$）。于是 $1+t=s^2$，而

$$A_0(t)=(s-1)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{(s-1)^2}{s^2}=\left(1-\frac{1}{s}\right)^2.$$

想一想 两边看起来都很繁复：自然的变量是甚么？

以 s 表示，一切都简洁得多。我们有 $\ln(1+t)=2\ln s$ 及 $\dfrac{t}{1+t}=1-\dfrac{1}{s^2}$，所以 $-t^2\mathrm{g}'(t)>A_0(t)$ 变成

$$\begin{aligned}2\ln s-1+\frac{1}{s^2}&>1-\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\\ \iff\quad 2\ln s&>2-\frac{2}{s}\\ \iff\quad \ln s&>1-\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

由于 $s=\sqrt{1+t}$ 及 $\ln s=\ln\sqrt{1+t}$，上式即

$$\ln\sqrt{1+t}>1-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\qquad(t>0),$$

得证。

验算

- 取 $t=3$：$s=2$，$x_0=1$，$A_0=\frac{1}{4}$，而区域面积为 $\ln 4-\frac{3}{4}\approx 0.636>0.25$。最终的不等式为 $\ln 2\approx 0.693>0.5$。
- 以电脑对多个 t 值直接搜索矩形面积 $x\big(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(t)\big)$，确认最大值为 $(1-1/\sqrt{1+t})^2$，在 $x=\sqrt{1+t}-1$ 取得。

- 当 $t \to 0^+$ 时，最终不等式两边都趋向 0；展开可得 $\ln s \approx (s-1) - \frac{1}{2}(s-1)^2$ 及 $1 - \frac{1}{s} \approx (s-1) - (s-1)^2$，所以左边大约多出 $\frac{1}{2}(s-1)^2$，正合预期。

常见错误

- 不加说明便假设最佳矩形的角落在曲线上：这需要用到递减的性质，如第 (i) 部分所示。
- 忘记解释为何面积不等式是严格的：矩形漏掉了区域中 $x_0 < x < t$ 的部分。
- 取了负根 $1 + x_0 = -\sqrt{1+t}$，这会得出 $x_0 < 0$。

STEP 之外

最终的不等式，即对 $s > 1$ 有 $\ln s > 1 - 1/s$，是经典界限 $1 - \frac{1}{s} < \ln s < s - 1$ 的其中一半；这组界限来自把 $\int_1^s \mathrm{d}u/u$ 与矩形作比较，而本题则以一条更巧妙的几何途径得到它。把积分与矩形面积作比较，正是黎曼（Riemann）积分的核心；大学一年级的分析课程会由上和与下和（upper and lower sums）出发，仔细建立这套理论。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对此有非常易读的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。