详细解答

STEP II 2013，第 7 题

纯数学 · 佩尔方程的解

STEP II 2013，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q7

关键思路

形如 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的方程称为佩尔方程（Pell equation）：只要找到一组解，一个固定的线性映射（linear map）便能产生无限多组解。第 (i) 和 (ii) 部分把这些解与同时是平方数的三角形数（triangular number）联系起来。第 (iii) 部分的技巧是把 a^2 移到另一边，再把 $c^4 - a^2$ 按平方差（difference of two squares）因式分解。由于 b 是质数（prime），把 b^3 拆成两个因数的方法寥寥可数。最后，第 (ii) 部分为最后一部分提供一个非质数的 b。

解答

第 (i) 部分

显然的解是 $x = 1$、$y = 0$，因为 $1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$。

现设 $p^2 - 2q^2 = 1$。那么

$$\begin{aligned}(3p + 4q)^2 - 2(2p + 3q)^2 &= (9p^2 + 24pq + 16q^2) - 2(4p^2 + 12pq + 9q^2) \\ &= p^2 - 2q^2 = 1,\end{aligned}$$

因为含 pq 的项互相抵消。所以 $x = 3p + 4q$、$y = 2p + 3q$ 也是一组解，正如所求。

把这个映射作用于 $(p, q) = (1, 0)$ 得 $(3, 2)$，再作用于 $(3, 2)$ 得 $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 2,\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = (17, 12)$。验证：$9 - 8 = 1$ 及 $289 - 288 = 1$。因此，两组 x 为正奇数、y 为正偶数的解是

$$(x, y) = (3, 2) \quad \text{及} \quad (x, y) = (17, 12).$$

（事实上，这个映射总会保持 x 为奇数，因为 $3p + 4q \equiv p \pmod 2$；而一旦 y 是偶数，它亦会保持 y 为偶数，因为 $2p + 3q \equiv q \pmod 2$。所以这条链中往后的每一组解都具有正确的奇偶性（parity）：$(99, 70)$、$(577, 408)$，如此类推。）

第 (ii) 部分

设 x 为奇数、y 为偶数，并写 $x = 2m+1$ 及 $y = 2n$，其中 m、n 为整数。那么 $(*)$ 变成

$$(2m+1)^2 - 2(2n)^2 = 1 \iff 4m^2 + 4m = 8n^2 \iff n^2 = \tfrac{1}{2}m(m+1),$$

最后一步是除以 8。这正是所求的形式。（每一步都是可逆的，所以对这样的 x 和 y，两条方程是等价的。）

所以 n^2 是三角形数 $1+2+\cdots+m$。由第 (i) 部分，$(3,2)$ 给出 $m=1$、$n=1$（即 $1=1$），而 $(17,12)$ 给出 $m=8$、$n=6$（即 $36 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9$）。我们会在第 (iii) 部分用到后者。

第 (iii) 部分

移项并按平方差因式分解，

$$b^3 = c^4 - a^2 = (c^2 - a)(c^2 + a).$$

由于 $b^3 > 0$ 及 $c^2 + a > 0$，因数 $c^2 - a$ 也是正整数。此外 $a > 0$，所以 $c^2 - a < c^2 + a$。

> ? **想一想** 把 b^3 写成两个正整数之积，共有多少种方法?

因为 b 是质数，b^3 的正因数只有 1、b、b^2 和 b^3。所以把 b^3 分解成较小因数乘以较大因数的方式只有 $1 \times b^3$ 和 $b \times b^2$。此外别无其他，而且两个因数永远不可能相等，因为 b^3 不是完全平方数（perfect square）。

情况 1：$c^2 - a = 1$ 及 $c^2 + a = b^3$。两式相加及相减，得

$$c^2 = \tfrac{1}{2}(b^3+1), \qquad a = \tfrac{1}{2}(b^3-1).$$

情况 2：$c^2 - a = b$ 及 $c^2 + a = b^2$。两式相加及相减，得

$$c^2 = \tfrac{1}{2}b(b+1), \qquad a = \tfrac{1}{2}b(b-1).$$

（题目只要求这些公式，但值得知道哪些情况真的会出现。情况 2 永远不会出现。当 $b=2$ 时，它需要 $c^2 = 3$。若 b 是奇质数，则 b 与 $\frac{1}{2}(b+1)$ 互质（coprime），因为 $1 \le \frac{1}{2}(b+1) < b$；而它们的积是平方数 c^2，所以两者都必须是平方数。但质数永远不是平方数。情况 1 则确实会出现：$b = 23$ 给出 $\frac{1}{2}(23^3+1) = 6084 = 78^2$，所以 $a = 6083$、$b = 23$、$c = 78$ 是一组解。）

最后部分

情况 2 对质数不成立，但若我们放弃 b 必须是质数的要求，它的公式仍然能给出解。每当 $\frac{1}{2}b(b+1)$ 是完全平方数 c^2 时，令 $a = \frac{1}{2}b(b-1)$。那么

$$a^2 + b^3 = (c^2 - b)^2 + b^3 = c^4 - 2bc^2 + b^2 + b^3 = c^4 - b^2(b+1) + b^2 + b^3 = c^4,$$

这里用了 $2c^2 = b(b+1)$。第 (ii) 部分正好告诉我们 $\frac{1}{2}b(b+1)$ 何时是平方数：$b = m$，其中 $n^2 = \frac{1}{2}m(m+1)$。解 $m = 1$ 给出 $a = 0$，这是不容许的，但 $m = 8$、$n = 6$ 可行。取 $b = 8$、$c = 6$、$a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$：

$$28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296 = 6^4.$$

所以 $a = 28$、$b = 8$、$c = 6$ 是一组解，其中 $b = 2^3$ 不是质数。

验算

- 链中的下一组解 $(99, 70)$ 满足 $9801 - 2 \cdot 4900 = 1$，它给出 $m = 49$、$n = 35$，且 $\frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 50 = 1225 = 35^2$。
- $6^4 = 1296$ 及 $28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296$。
- 以电脑搜索所有 $c < 400$，发现 $a = 6083$、$b = 23$、$c = 78$ 是 b 为质数时的唯一解。它属于情况 1 的解：$78^4 - 6083^2 = (78^2 - 6083)(78^2 + 6083) = 1 \times 12167 = 23^3$。

常见错误

- 忘记 $c^2 - a$ 必须是较小的因数，因而多出一些 a 为负数的“情况”。
- 漏掉分解 $1 \times b^3$，只找到 $b \times b^2$ 的情况，或者反过来。
- 在最后部分使用由 $(3, 2)$ 得出的 $m = 1$，这会给出 $a = 0$；但题目要求 a 为正数。

STEP 之外

方程 $x^2 - 2y^2 = 1$ 就是佩尔方程。它的解恰好就是幂 $(3 + 2\sqrt{2})^k = x + y\sqrt{2}$，而第 (i) 部分的映射只不过是乘以 $3 + 2\sqrt{2}$。这是环（ring）如 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 中的单位（unit）理论以及连分数（continued fraction）理论的起点。像 $a^2 + b^3 = c^4$ 这样的方程属于广义费马方程（generalised Fermat equation）的研究范畴。若想读一本精彩的入门书，涵盖以上种种，可阅读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。