详细解答

STEP II 2013，第 6 题

纯数学 • 数列的收敛

> **STEP II 2013，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 2.2 节作为极限的黄金比例中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/golden-limit.html

关键思路

各项 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ 交替地跳到其最终极限（limit）的上方和下方，所以整个数列（sequence）并非单调（monotonic），不能直接套用该定理。然而，每隔一项取一项，便得到两个单调数列。第 (i) 部分正是显示这一点的工具：它说明由于分母为正，步长 $u_{n+2} - u_n$ 与上一步 $u_n - u_{n-2}$ 同号。

解答

首先注意每个 u_n 都是正数：$u_1 = 1 > 0$，而若 $u_n > 0$，则 $u_{n+1} = 1 + 1/u_n > 1 > 0$。因此我们从不会除以零，而且像 $1 + u_n$ 这样的因子都是正数。

第 (i) 部分

两次使用 $(*)$，

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{u_{n+1}u_{n-1}}, \qquad u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-2}} = \frac{u_{n-2} - u_n}{u_n u_{n-2}}.$$

（第二式需要 u_{n-2} 存在，这就是 $n \geq 3$ 的原因。）把第二式代入第一式，两个负号互相抵消：

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(u_n u_{n+1})(u_{n-2}u_{n-1})}.$$

最后，把 $(*)$ 乘以 u_n 得 $u_n u_{n+1} = u_n + 1$，同理 $u_{n-2}u_{n-1} = u_{n-2} + 1$。因此

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(1+u_n)(1+u_{n-2})},$$

得证。

第 (ii) 部分

我们使用归纳法（induction）。由于 $u_1 = 1$，命题 $1 \le u_1 \le 2$ 成立。假设 $1 \le u_n \le 2$。对正数取倒数（reciprocal）会令不等式反向，所以 $\frac{1}{2} \le 1/u_n \le 1$，因此

$$\tfrac{3}{2} \le u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \le 2,$$

这当然给出 $1 \le u_{n+1} \le 2$。由归纳法，对所有 n 均有 $1 \le u_n \le 2$。

第 (iii) 部分

奇数项。我们有 $u_1 = 1$ 及 $u_3 = \frac{3}{2}$，所以 $u_3 - u_1 > 0$。对于奇数 $n \ge 3$，第 (i) 部分说明 $u_{n+2} - u_n$ 等于 $u_n - u_{n-2}$ 乘以正数 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$，所以两者同号。由归纳法，每一步 $u_{n+2} - u_n$（n 为奇数）都是正数：数列 $u_1, u_3, u_5, \ldots$ 是递增（increasing）的。由 (ii)，它有上界（bounded above）2，所以由该定理，它趋向某个极限 L；由于其所有项都在 $[1,2]$ 内，故 $1 \le L \le 2$。

偶数项。这里 $u_2 = 2$ 及 $u_4 = \frac{5}{3}$，所以 $u_4 - u_2 < 0$，同样的论证显示 $u_2, u_4, u_6, \ldots$ 是递减（decreasing）的。它有下界 1。

> ? **想一想** 该定理是关于有上界的递增数列的。我们怎样把它用于递减数列?

把它应用于各项的相反数：$-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$ 是递增的，且有上界 -1，所以它趋向某个极限，因此 $u_2, u_4, \ldots$ 亦然；记其极限为 M。同样有 $1 \le M \le 2$。

求极限。使用 $(*)$ 两步，便得到一条联系同奇偶性（parity）各项的递推关系（recurrence）：

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

> ? **想一想** 为甚么我们可以直接把 u_{n+2} 和 u_n 换成 L?

沿着奇数 n，u_n 和 u_{n+2} 都趋向 L。右方是 u_n 的连续函数（continuous function）（其分母至少为 2），所以它趋向 $(2L+1)/(L+1)$。极限是唯一的，所以

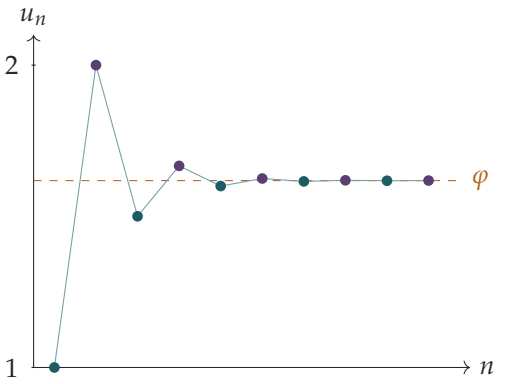
$$L = \frac{2L+1}{L+1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0,$$

于是 $L = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$。由于 $L \geq 1$，必须有 $L = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$。$M$ 满足完全相同的方程，且 $M \geq 1$，所以

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} u_{2k} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

这两个极限本来有可能不同（那样整个数列便会振荡），但该方程只有一个至少为 1 的根。

整个数列。记 $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$，并设 $\varepsilon > 0$。存在 K_1 使得对所有奇数 $n > K_1$ 均有 $|u_n - \varphi| < \varepsilon$，亦存在 K_2 使得对所有偶数 $n > K_2$ 同样成立。那么对每个 $n > \max(K_1, K_2)$ 均有 $|u_n - \varphi| < \varepsilon$，所以 $u_n \to \varphi$。



奇数项（青绿色）向 φ 攀升，偶数项（梅紫色）则向它下降。

由 $u_1 = 3$ 开始

结论不变。现在 $u_1 = 3$，$u_2 = \frac{4}{3}$，$u_3 = \frac{7}{4}$，$u_4 = \frac{11}{7}$。论证只需稍作调整。

- 第 (i) 部分只用到 $(*)$ 及各项为正，这仍然成立，所以该恒等式（identity）依然成立。
- 第 (ii) 部分在 $n = 1$ 时不成立，但 $1 \leq u_2 = \frac{4}{3} \leq 2$，而归纳步骤不变，所以对所有 $n \geq 2$ 均有 $1 \leq u_n \leq 2$。另外 $u_1 = 3 \geq 1$，所以每一项都至少为 1。
- 这次 $u_3 - u_1 = -\frac{5}{4} < 0$ 而 $u_4 - u_2 = \frac{5}{21} > 0$。所以奇数项递减且有下界 1，偶数项递增且有上界 2：角色互换了，但两者仍然收敛（converge）。
- 递推关系 $u_{n+2} = (2u_n + 1)/(u_n + 1)$ 仍然成立，而两个极限都至少为 1，所以两者同样都是 φ。

所以该数列仍然趋向 $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$。

验算

当 $u_1 = 1$ 时，各项为 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$，即相邻斐波那契数（Fibonacci numbers）之比，而 $u_{10} = \frac{89}{55} \approx 1.61818$，已经非常接近 $\varphi \approx 1.61803$。当 $u_1 = 3$ 时，各项为 $3, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \ldots$（卢卡斯数（Lucas numbers）之比），它们同样趋近 1.61803。你亦可以用 $n = 3$ 验算 (i) 中的恒等式：$u_5 - u_3 = \frac{1}{10}$，而 $\dfrac{u_3 - u_1}{(1+u_3)(1+u_1)} = \dfrac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$。

常见错误

- 假设整个数列收敛，然后直接解 $L = 1 + 1/L$。这样得出的数值是对的，但只有在证明了收敛之后才成立，而这正是本题的重点。
- 忘记了根 $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$：必须把它排除，这里是利用 $L \geq 1$。
- 把该定理应用于递减的偶数项子数列（subsequence），却没有说明怎样做（例如通过 $-u_{2k}$）。

STEP 之外

这是大学一年级分析学（analysis）中一个标准论证的范本：单调收敛定理（monotone convergence theorem）、子数列，以及“若奇数项子数列与偶数项子数列收敛到同一极限，则整个数列亦收敛到该极限”这一事实。事实上，u_n 是连分数（continued fraction）$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$ 的第 n 个渐近分数（convergent），而映射 $x \mapsto 1 + 1/x$ 在 φ 附近是一个压缩映射（contraction），这就是任何正数起点都会趋向 φ 的原因。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）仔细讨论了单调数列和子数列，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）则涵盖了连分数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。