详细解答

STEP II 2013，第 5 题

纯数学 · 对称性与曲线描绘

STEP II 2013，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q5

关键思路

如果一个函数在 $x \mapsto 1-x$ 或 $x \mapsto 1/x$ 这类代换下保持不变，那么用链式法则（chain rule）对该恒等式求导，便能把 x 处的斜率与像点处的斜率联系起来。在代换的不动点（fixed point）上，斜率必须等于自身的相反数，因此为零。至于第 (iii) 部分的方程，对称性提示我们把一切以 $u = x^2 - x$ 表示，而它本身在 $x \mapsto 1-x$ 下不变；这样一来，处理关于 u 的三次方程，远比处理关于 x 的六次方程容易。

解答

第 (i) 部分

把 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1-x)$ 对 x 求导，右边使用链式法则，得

$$\mathrm{f}'(x) = -\mathrm{f}'(1-x) \qquad \text{对所有} x.$$

代入 $x = \frac{1}{2}$，得 $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = -\mathrm{f}'(\frac{1}{2})$，因此 $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$。

现在再假设当 $x \neq 0$ 时 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1/x)$。由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$，求导得

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{f}'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

在 $x = -1$（它是自身的倒数）处，此式变为 $\mathrm{f}'(-1) = -\mathrm{f}'(-1)$，因此 $\mathrm{f}'(-1) = 0$。

在 $x = 2$ 处，由第一个结果，此式给出 $\mathrm{f}'(2) = -\frac{1}{4}\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$。（同样地，在第一个恒等式中取 $x = 2$，可得 $\mathrm{f}'(2) = -\mathrm{f}'(-1) = 0$。）

第 (ii) 部分

以 $1/x$ 代替 x。分子变为

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)^3=\frac{(1-x+x^2)^3}{x^6},$$

而分母变为

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{x^4}.$$

相除，并利用 $x^2(1-x)^2=(x^2-x)^2$，得

$$\mathrm{f}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^6}\cdot\frac{x^4}{(1-x)^2}=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\mathrm{f}(x).$$

以 $1-x$ 代替 x：由于 $(1-x)^2-(1-x)=(1-x)(-x)=x^2-x$，所以 x^2-x 不变，从而 x^2-x+1 亦不变。因此 $\mathrm{f}(1-x)=\mathrm{f}(x)$。

草图。由第 (i) 部分，$x=-1$、$\frac{1}{2}$ 和 2 是驻点（stationary point）；由于驻点恰好有三个，这些就是全部。它们的函数值为

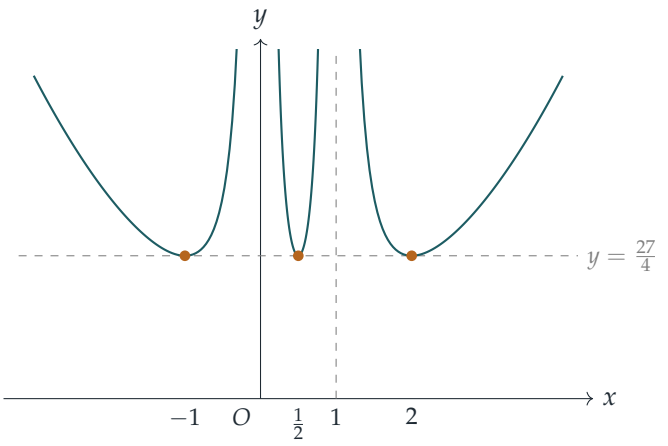
$$\mathrm{f}(-1)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4},\qquad \mathrm{f}(\tfrac{1}{2})=\frac{(3/4)^3}{(1/4)^2}=\frac{27}{4},\qquad \mathrm{f}(2)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4}.$$

三者相同，这是必然的：$\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}(\frac{1}{2})$ 且 $\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}(1-2)=\mathrm{f}(-1)$。

其他特征：

- $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，所以处处有 $\mathrm{f}(x)>0$；曲线永不与 x 轴相交。
- 当 $x\to 0$ 或 $x\to 1$ 时，分子趋向 1，分母趋向 0^+，所以从两侧皆有 $\mathrm{f}(x)\to+\infty$：$x=0$ 和 $x=1$ 是铅直渐近线（vertical asymptote）。
- 当 $|x|$ 很大时，$\mathrm{f}(x)\approx x^6/x^4=x^2$，所以当 $x\to\pm\infty$ 时 $\mathrm{f}(x)\to+\infty$，大致像一条抛物线。

因此在 $(-\infty,0)$、$(0,1)$、$(1,\infty)$ 这三个区间的每一个上，函数都是连续的，并在两端都趋向 $+\infty$。所以每个区间都必定包含一个最小值点，而它是驻点；每个区间恰好包含 -1、$\frac{1}{2}$、2 其中之一，所以该点就是最小值点，且没有其他转向点（turning point）。每一支都呈 U 形，最低值为 $\frac{27}{4}$。



第 (iii) 部分

方程 $\mathrm{f}(x)=\frac{27}{4}$。从草图可见，$\frac{27}{4}$ 是每一支上的最小值，而且只在三个驻点处取得。所以根为

$$x=-1,\qquad x=\tfrac{1}{2},\qquad x=2,$$

而对定义域内其他所有 x 都有 $\mathrm{f}(x)>\frac{27}{4}$，即对于

$$x<-1,\quad -1<x<0,\quad 0<x<\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{2}<x<1,\quad 1<x<2,\quad x>2.$$

我们可以用代数方法确认这一点。设 $u=x^2-x$（故在定义域内 $u\neq 0$）；则 $\mathrm{f}(x)=\dfrac{(u+1)^3}{u^2}$，且

$$\mathrm{f}(x)-\frac{27}{4}=\frac{4u^3-15u^2+12u+4}{4u^2}=\frac{(u-2)^2(4u+1)}{4u^2}.$$

由于 $4u+1=4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0$，此式永不为负，而它为零当且仅当 $u=2$（即 $x^2-x-2=0$，所以 $x=2$ 或 -1）或 $x=\frac{1}{2}$。

想一想 怎样才能不解六次方程，就猜出 $\mathrm{f}(x)=\frac{343}{36}$ 的一个根?

方程 $\mathrm{f}(x)=\frac{343}{36}$。注意 $\frac{343}{36}=\frac{7^3}{6^2}$，所以我们寻找满足 $x^2-x+1=7$ 和 $x^2-x=6$ 的 x。$x=3$ 两者皆满足，所以 $\mathrm{f}(3)=\frac{343}{36}$。对称性现在免费送上更多的根：对 3 反复施行 $x\mapsto 1-x$ 和 $x\mapsto 1/x$，得到

$$3,\quad 1-3=-2,\quad \tfrac{1}{3},\quad 1-\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3},\quad \tfrac{3}{2},\quad 1-\tfrac{3}{2}=-\tfrac{1}{2}.$$

这是六个不同的数，而去分母后，$\mathrm{f}(x)=\frac{343}{36}$ 会变成一个六次多项式方程，所以这些就是全部的根：

$$x=-2,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{2},\ 3.$$

（以 u 表示，方程为 $36u^3 - 235u^2 + 108u + 36 = 0$，可因式分解为 $(u-6)(9u+2)(4u-3) = 0$，得出数对 $\{3, -2\}$、$\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ 和 $\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\}$。）

由于 $\frac{343}{36} > \frac{27}{4}$，水平线 $y = \frac{343}{36}$ 与每一支 U 形曲线各相交两次，在最小值两侧各一次，而在这两个交点以外，曲线位于直线上方。$(-\infty, 0)$ 上的一支交于 -2 和 $-\frac{1}{2}$，$(0, 1)$ 上的一支交于 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$，$(1, \infty)$ 上的一支交于 $\frac{3}{2}$ 和 3。因此 $\mathrm{f}(x) > \frac{343}{36}$ 当且仅当

$$x < -2, \quad -\tfrac{1}{2} < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3} < x < 1, \quad 1 < x < \tfrac{3}{2}, \quad x > 3.$$

验算

- 试代一个值：$\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = \dfrac{(7/4)^3}{(3/4)^2} = \dfrac{343/64}{9/16} = \dfrac{343}{36}$，与所述相符。
- 取所述区间内的一点：$\mathrm{f}(4) = \frac{13^3}{12^2} \approx 15.3 > \frac{343}{36} \approx 9.53$，而 $\mathrm{f}(2) = 6.75$ 位于下方，与 $(\frac{3}{2}, 3)$ 被排除一致。
- 六个根既可配成和为 1 的数对，又可配成互为倒数的数对，正如两个对称性所要求；以电脑在 10^5 个随机点上检验，确认了这些不等式。

常见错误

- 对 $\mathrm{f}(1/x)$ 求导时，忘记链式法则带来的因子 $-1/x^2$。这在 $x = -1$ 处无关重要，但要明白为何 2 处的斜率为零，这个因子不可或缺。
- 把范围写成 $x < -2$ 或 $x > 3$ 之类的单一区间，忘记了 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处的渐近线把解集分割开来；必须排除 $x = 0$ 和 $x = 1$。
- 把驻点当作极大值点。每一支在两端都趋向 $+\infty$，所以它们是极小值点。

STEP 之外

由 $x \mapsto 1 - x$ 和 $x \mapsto 1/x$ 生成的六个映射构成一个群（group）（同构（isomorphic）于三角形的对称群），而 f 在相差一个常数因子的意义下，就是交比（cross-ratio）的经典 j 不变量（j-invariant）：即在全部六个代换下都保持不变的函数。在一组代换下不变的函数，是伽罗瓦理论（Galois theory）和椭圆曲线（elliptic curve）理论的核心主题。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）是认识这类变换群的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。