详细解答

STEP II 2013，第 4 题

纯数学 · 弦中点的轨迹

STEP II 2013，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q4

关键思路

求弦（chord）的中点（midpoint）时，根本不必求出弦的两个端点：P 和 Q 的 x 坐标是某个二次方程（quadratic equation）的根，而它们的平均值就是首两项系数之比的一半再取负号。之后，每个轨迹（locus）都只是消去一个参数（parameter）的问题。每个答案都可以用几何解释：由圆心到弦中点的直线与该弦垂直（perpendicular）。

解答

M 的坐标

直线为 $y = b(x - a)$。代入 $x^2 + y^2 = 1$，得

$$(1 + b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 - 1 = 0.$$

它的根是 P 和 Q 的 x 坐标 x_P、x_Q，所以由根之和（sum of the roots）得

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_P + x_Q) = \frac{ab^2}{1 + b^2}.$$

由于 M 在该直线上，$y_M = b(x_M - a) = b \cdot \dfrac{ab^2 - a - ab^2}{1 + b^2}$，所以

$$M = \left(\frac{ab^2}{1 + b^2},\ -\frac{ab}{1 + b^2}\right).$$

要 P 和 Q 存在且互不相同，判别式（discriminant）必须为正：

$$4a^2b^4 - 4(1 + b^2)(a^2b^2 - 1) = 4(1 + b^2 - a^2b^2) > 0 \iff a^2b^2 < 1 + b^2.$$

（这表示由 O 到该直线的距离 $|ab|/\sqrt{1 + b^2}$ 小于 1。）每一部分都需要用到这个条件。

第 (i) 部分

固定 $b > 0$，则

$$-by_M = -b \cdot \left(-\frac{ab}{1+b^2}\right) = \frac{ab^2}{1+b^2} = x_M,$$

所以轨迹上每一点都满足 $x = -by$，正如所求。这是通过 O、斜率（gradient）为 $-1/b$ 的直线，与弦垂直，与关键思路的预期完全一致。

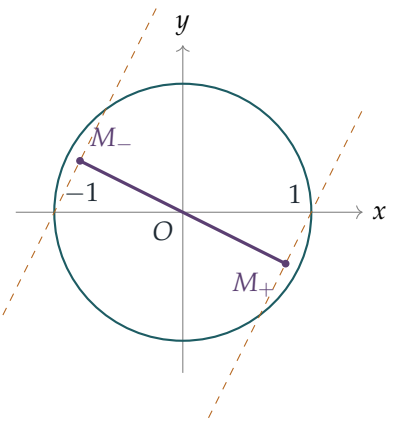
若 $-1 \le a \le 1$，则 $a^2b^2 \le b^2 < 1 + b^2$，所以直线必与圆相交于两点，对每个这样的 a，M 都有定义。M 的两个坐标都是 a 乘以一个常数，所以当 a 取遍 $[-1,1]$ 时，点 M 沿直线 $x = -by$ 由 $a = -1$ 对应的点稳定地移动到 $a = 1$ 对应的点。因此轨迹是连接

$$M_\pm = \pm\left(\frac{b^2}{1+b^2}, -\frac{b}{1+b^2}\right),$$

的线段，其长度为

$$2\,\frac{\sqrt{b^4+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b}{(1+b^2)^{1/2}},$$

这里利用了 $b > 0$ 来开 b^2 的平方根。这就是所求的长度。线段以 O 为中点；其端点 M_+ 是通过 $(1,0)$ 的弦的中点，而 M_- 则是通过 $(-1,0)$ 的弦的中点。下图显示 $b = 2$ 的情况，此时端点为 $\pm(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$。



虚线是两条极端的弦，分别通过 $(\pm 1, 0)$，斜率为 2。

第 (ii)(a) 部分

现在固定 a，且 $0 < a < 1$。于是 $a^2b^2 < b^2 < 1 + b^2$，所以每条通过 $A = (a, 0)$ 的直线都与圆相交两次。由 M 的公式，

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^4 + a^2b^2}{(1+b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{1+b^2} = a \cdot \frac{ab^2}{1+b^2} = ax.$$

所以 M 在

$$x^2+y^2-ax=0,\quad \text{即}\quad (x-\tfrac{a}{2})^2+y^2=(\tfrac{a}{2})^2,$$

上，这是圆心为 $(\frac{a}{2},0)$、半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆，以 OA 为直径（diameter）。

想一想 这个圆是否整个都被描出?

并不完全。由于 $x=ab^2/(1+b^2)=a-a/(1+b^2)$，总有 $0\le x<a$，所以点 $A=(a,0)$ 本身永远不会到达；要到达它，需要通过 A 的铅垂线，而铅垂线没有斜率。其他每一点都能到达：设 $b=\tan\theta$，其中 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，

$$M=(a\sin^2\theta,\ -a\sin\theta\cos\theta)=(\tfrac{a}{2}-\tfrac{a}{2}\cos 2\theta,\ -\tfrac{a}{2}\sin 2\theta),$$

当 2θ 取遍 $(-\pi,\pi)$ 时，这恰好走遍整个圆一次，只差 $2\theta=\pm\pi$ 对应的点，即 A。所以轨迹是以 OA 为直径的圆，但除去单独一点 A。从几何角度看：OM 与弦 AM 垂直，所以 $\angle OMA$ 是直角，M 在以 OA 为直径的圆上（当 $b=0$ 时 $M=O$）。这个圆位于单位圆之内。

第 (ii)(b) 部分

现在 $a=1/b$，其中 $0<b\le 1$。条件 $a^2b^2<1+b^2$ 变成 $1<1+b^2$，此式成立。直线为 $y=b(x-1/b)=bx-1$，所以它必定通过单位圆上的点 $B=(0,-1)$；因此 B 必定是 P、Q 其中之一。公式给出

$$M=\left(\frac{b}{1+b^2},\ -\frac{1}{1+b^2}\right),\qquad x^2+y^2=\frac{b^2+1}{(1+b^2)^2}=\frac{1}{1+b^2}=-y.$$

所以 M 在

$$x^2+y^2+y=0,\quad \text{即}\quad x^2+(y+\tfrac{1}{2})^2=(\tfrac{1}{2})^2,$$

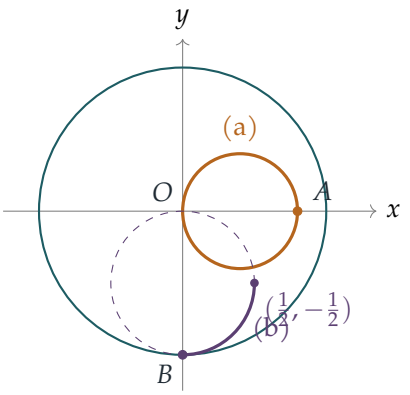
上，这是圆心为 $(0,-\frac{1}{2})$、半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆，以 OB 为直径（理由与 (a) 中的直角相同）。

这次只描出圆的一部分。设 $b=\tan\theta$，$0<\theta\le\frac{\pi}{4}$，

$$M=(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta,\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta),$$

而 2θ 取遍 $(0,\frac{\pi}{2}]$。所以轨迹是四分之一个圆：由 $B=(0,-1)$（不包括在内，因为它需要 $b=0$）沿逆时针方向到 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$（包括在内，由 $b=1$、$a=1$ 得到）的圆弧。在这段弧上，$0<x\le\frac{1}{2}$ 且 $-1<y\le-\frac{1}{2}$。

下图连同单位圆显示两个轨迹，(a) 中取 $a=0.8$。空心圆点标示 (a) 中缺少的点 A 和 (b) 中缺少的端点 B。



在 (b) 中，实线弧是轨迹；小圆其余的虚线部分不会到达。

验算

- 当 $a = 0$ 时，直线通过 O，所以弦是直径，M 应该是 O：公式给出 $(0, 0)$。
- 在 (i) 中取 $b = 1$：通过 $(1, 0)$、斜率为 1 的弦连接 $(1, 0)$ 和 $(0, -1)$，中点为 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$，与 M_+ 吻合。此时线段长度为 $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$，与公式一致。
- 同一条弦正是 (ii)(b) 中圆弧在 $b = 1$ 的端点，而 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 满足 $x^2 + y^2 + y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$。
- 在 (ii)(a) 中，$b = 1$ 给出 $M = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$，即以 OA 为直径的圆的最低点，对于倾角 45° 的弦，理应如此。

常见错误

- 用二次方程公式明确求出 P 和 Q。这样做可行，但用根之和一行就能得出 M。
- 在 (ii)(a) 或 (ii)(b) 中声称轨迹是整个圆。必须检查参数实际取哪些值，以及这些值对应哪些点。
- 忘记检查直线是否真的与圆相交；在 (i) 和 (ii) 的两种情况中，它都必定相交，但这一点需要说明。

STEP 之外

平行弦的中点位于一条通过中心的直线上，这个事实对任何圆锥曲线 (conic) 都成立：对椭圆而言，这条直线称为*共轭直径* (conjugate diameter)，这也让我们初步窥见射影几

何中极点与极线（poles and polars）的概念。第 (ii) 部分中的圆，其实就是经典定理“半圆上的圆周角是直角”反过来运用。若想进一步了解轨迹和以参数化（parametrisation）作为解题工具，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）是很好的下一步。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。