详细解答

STEP II 2013，第 3 题

纯数学 · 三次方程的根

STEP II 2013，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q3

关键思路

一切都源于首项系数为正、且有三个相异实根的三次函数（cubic）的形状：曲线从 $-\infty$ 上升，向上穿过横轴，回落，然后再次向上穿过横轴。数值 $f(0)=c$ 告诉我们 0 相对于各根的位置，而转向点（turning points）（即二次方程 $f'(x)=0$ 的根）则可以通过它们的和与积来确定。最后一部分提醒我们：单靠转向点的条件，并不能保证曲线真的与横轴相交三次。

解答

全文中设

$$f(x)=x^3+3ax^2+3bx+c, \qquad f'(x)=3(x^2+2ax+b).$$

当 $f(x)=0$ 有三个相异实根 $\alpha<\beta<\gamma$ 时，我们可以写成 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，于是从三个因式的正负号可读出

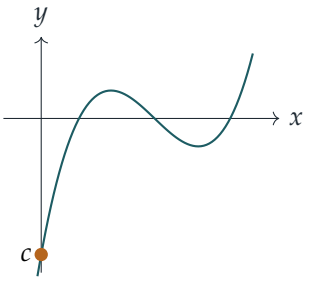
$$f(x)<0 \text{ 于 } (-\infty,\alpha)\cup(\beta,\gamma), \qquad f(x)>0 \text{ 于 } (\alpha,\beta)\cup(\gamma,\infty).$$

此外，由罗尔定理（Rolle's theorem），f' 在 (α,β) 内有一个零点，在 (β,γ) 内有另一个零点。由于 f' 是二次函数，它再没有其他零点，因此转向点位于 $p<q$，且

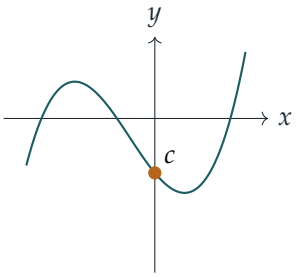
$$\alpha<p<\beta<q<\gamma.$$

第 (i) 部分

曲线 $y=f(x)$ 与 y 轴相交于 $(0,c)$；由于 $c<0$，这点位于 x 轴下方。根据上面的正负号规律，$f(0)<0$ 表示 $0<\alpha$ 或 $\beta<0<\gamma$。这就是下面的两幅图。



三个根皆为正



恰有一个根为正

若 $0 < \alpha$，则三个根皆为正。若 $\beta < 0 < \gamma$，则 $\alpha < \beta < 0$，因此恰有一个根（γ）为正。由于 $f(0) = c \neq 0$，没有根等于零。所以要么恰有一个根为正，要么三个根皆为正，得证。

第 (ii) 部分

现在 $0 < \alpha < \beta < \gamma$。

c 的正负号。由于 $0 < \alpha$，点 0 位于 $(-\infty, \alpha)$ 内，而在该区间上 $f < 0$。所以 $c = f(0) < 0$。

转向点。方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有两个相异实根 p 和 q，因此其判别式（discriminant）为正：

$$4a^2 - 4b > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 > b.$$

由于 $p > \alpha > 0$ 且 $q > p$，两个转向点皆为正。对于二次式 $x^2 + 2ax + b$，两根之和与积分别为

$$p + q = -2a, \qquad pq = b.$$

由于 $p, q > 0$，得 $-2a > 0$，所以 $a < 0$，且 $b = pq > 0$。综合以上，

$$a^2 > b > 0, \qquad a < 0, \qquad c < 0,$$

这就是 $(*)$。

（你也可以直接从根得出 $a < 0$、$b > 0$ 和 $c < 0$：$\alpha + \beta + \gamma = -3a$、$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b$ 和 $\alpha\beta\gamma = -c$ 皆为正。但 $a^2 > b$ 确实需要用到转向点。）

第 (iii) 部分

现在 $c = f(0) > 0$，所以 0 位于 (α, β) 或 (γ, ∞) 内，即 $f > 0$ 的两个区间。这给出两幅可能的图：要么 $\alpha < 0 < \beta < \gamma$（一个负根、两个正根），要么 $\alpha < \beta < \gamma < 0$（三个根皆为负）。

? **想一想** 条件 $ab < 0$ 怎样排除其中一种情况?

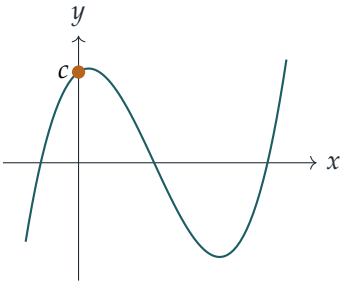
再看看转向点。若三个根皆为负，则 $p < q < \gamma < 0$，所以两个转向点皆为负。于是

$$-2a = p + q < 0 \quad \text{及} \quad b = pq > 0,$$

所以 $a > 0$ 且 $b > 0$，得 $ab > 0$。这与 $ab < 0$ 矛盾。因此第二幅图不可能出现，故

$$\alpha < 0 < \beta < \gamma :$$

一个根为负，另外两个根为正。



这种情况确实可以出现。例如，根 -1、2 和 5 给出 $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$，所以 $a = -2$、$b = 1$、$c = 10$，其中 $ab = -2 < 0$ 且 $c > 0$；这就是上面所绘的曲线。

第 (iv) 部分

想一想 除了 $(*)$ 之外，三次函数还需要甚么额外条件才有三个实根?

条件 $(*)$ 只控制转向点和 $f(0)$ 的正负号。要有三个实根，局部极大值（local maximum）还必须位于横轴上方。所以我们应选取 a 和 b 使两个转向点皆为正，然后令 c 足够负，把局部极大值拉到横轴下方。

取 $a = -1$ 及 $b = \frac{3}{4}$，使得

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x + \tfrac{3}{4}) = 3(x - \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{3}{2}).$$

局部极大值位于 $x = \frac{1}{2}$，该处

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{8} + c = \tfrac{1}{2} + c.$$

选取 $c = -1$。方程于是为

$$x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{4}x - 1 = 0 \qquad (a = -1,\ b = \tfrac{3}{4},\ c = -1),$$

且 $a^2 = 1 > \frac{3}{4} = b > 0$、$a < 0$、$c < 0$，所以 $(*)$ 成立。

现在数一数根的个数。f 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 上递增，所以在该处 $f(x) \le f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$。在 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ 上，f 递减，所以一直低于 $-\frac{1}{2}$。在 $[\frac{3}{2}, \infty)$ 上，f 从 $f(\frac{3}{2}) = -1$ 递增至 $+\infty$，所以恰好穿过横轴一次。因此恰有一个实根（由于 $f(2) = -\frac{1}{2}$ 及 $f(3) = \frac{23}{4}$，它位于 2 与 3 之间）。

验算

- 三次式 $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 的 $a = -2$、$b = \frac{11}{3}$、$c = -6$，而的确 $a^2 = 4 > \frac{11}{3} > 0$，正如第 (ii) 部分所预测。
- 把曲线反射，即 $x \mapsto -x$，会把根 α, β, γ 变为 $-\alpha, -\beta, -\gamma$，并改变 a 和 c 的正负号，但不改变 b。所以 ab 和 c 都改变正负号，而第 (i) 部分的镜像版本说明：当 $c > 0$ 时，要么恰有一个根为负，要么三个根皆为负——这正是我们在第 (iii) 部分开始时的两幅图。
- 在第 (iv) 部分中，唯一的实根是 $x \approx 2.178$。以电脑检查数以千计随机生成、具三个相异实根的三次式，结果亦与第 (i)–(iii) 部分吻合。

常见错误

- 试图单从根的正负号证明 $a^2 > b$。这个不等式其实来自转向点是相异实数这一事实。
- 以为 $(*)$ 等价于有三个正根。第 (iv) 部分说明它只是必要条件（necessary），而非充分条件（sufficient）。
- 在第 (iv) 部分中，选取的 c 使局部极小值为负，但局部极大值仍为正。这样会得到三个根，而不是一个。

STEP 之外

这里的正负号论证是一套一般理论的起点：笛卡儿符号法则（Descartes' rule of signs）以系数中正负号改变的次数作为正根个数的上界，而斯图姆定理（Sturm's theorem）则能准确计算某区间内实根的个数。对于三次函数，第 (iv) 部分所缺少的条件是判别式的正负号；判别式（相差一个正因子）就是两个转向点处函数值的乘积 $-f(p)f(q)$。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）以大学一年级程度讨论多项式及其根。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。