详细解答

# STEP II 2013，第 2 题

纯数学 · 归约公式

**STEP II 2013，第 2 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q2

## 关键思路

被积函数（integrand）$x^n(1-x)^n$ 在反射 $x \mapsto 1-x$ 下对称（symmetric），而这种对称性让我们可以毫无代价地互换 $x$ 与 $1-x$ 的角色。接着用分部积分（integration by parts）把 $x$ 的一个幂换成 $1-x$ 的一个幂，再利用恒等式 $x+(1-x)=1$ 把乘积拆回我们已知的积分。两者结合便得到一条递推公式（reduction formula）；对整数 $n$，它可以逐步展开成阶乘（factorial），而对半整数（half-integer）也同样适用。

## 解答

### 第 (i) 部分

对 $n \geq 1$，记 $J_n = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^n \,\mathrm{d}x$。代换（substitute）$u = 1-x$，于是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$，而积分限 $0, 1$ 变成 $1, 0$：

$$J_n = \int_1^0 (1-u)^{n-1}u^n\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^n(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

这就是所要求的等式（哑变量（dummy variable）用甚么名字并不重要）。

把 $J_n$ 的两个相等形式相加，

$$\begin{aligned} 2J_n &= \int_0^1 \left[x^{n-1}(1-x)^n + x^n(1-x)^{n-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}[(1-x)+x]\mathrm{d}x = I_{n-1}. \end{aligned}$$

接着对 $I_n$ 作分部积分，取 $u = x^n$ 及 $\mathrm{d}v = (1-x)^n\,\mathrm{d}x$，故 $v = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$：

$$I_n = \Big[-\frac{x^n(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

边界项（boundary term）在两端都等于零：在 $x=1$ 处是因为有因子 $(1-x)^{n+1}$，在 $x=0$ 处则是因为有因子 $x^n$ 且 $n \geq 1$。由此得到题目所给的公式

$$I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

**想一想** 怎样才能从这个积分回到 $I_n$ 和 $I_{n-1}$?

分出一个因子 $1-x$，并照字面写成 $1-x$：

$$x^{n-1}(1-x)^{n+1} = x^{n-1}(1-x)^n\,(1-x) = x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^n.$$

积分后，利用上面的结果，右边等于 $J_n - I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} - I_n$。所以

$$I_n = \frac{n}{n+1}\Big(\tfrac{1}{2}I_{n-1} - I_n\Big) \quad\Longrightarrow\quad I_n \cdot \frac{2n+1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}I_{n-1},$$

再乘以 $\dfrac{n+1}{2n+1}$，

$$I_n = \frac{n}{2(2n+1)}\,I_{n-1},$$

正是所求。留意这个论证完全没有用到 $n$ 是整数：只需要 $n \geq 1$（为了处理边界项，以及确保每个被积函数在 $[0,1]$ 上连续）。我们会在第 (iii) 部分用到这一点。

### 第 (ii) 部分

我们用归纳法（induction）证明 $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$，从 $n=0$ 开始：$I_0 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 = \dfrac{(0!)^2}{1!}$。假设公式对 $n-1$ 成立，其中 $n \geq 1$。那么由第 (i) 部分，

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n}{2(2n+1)} \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \frac{n^2((n-1)!)^2}{2n(2n+1)(2n-1)!} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

这里我们把分子和分母同乘以 $n$，并用了 $2n(2n+1)(2n-1)! = (2n+1)!$。归纳至此完成，所以公式对每个正整数 $n$（以及 $n=0$）都成立。

### 第 (iii) 部分

取 $x = \sin^2\theta$，则 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，而 $\theta$ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$。在这个区间上 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都非负，所以

$$(x(1-x))^{1/2} = (\sin^2\theta\cos^2\theta)^{1/2} = \sin\theta\cos\theta.$$

> **想一想** 为甚么这里需要 $\sin\theta\cos\theta \geq 0$?

因为 $\sqrt{t^2} = |t|$，而不是 $t$；在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上，绝对值（modulus）符号可以直接去掉。因此

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{4}\Big[\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

至于 $I_{\frac{3}{2}}$，用第 (i) 部分的递推公式并取 $n = \frac{3}{2}$；这是容许的，因为 $\frac{3}{2} \geq 1$，而推导过程从来不需要 $n$ 是整数：

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{3/2}{2\cdot 4} I_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{128}.$$

作为交叉验证，同一代换可直接得到

$$I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^4 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{128},$$

其中用了 $\sin^4\phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi$。

## 验算

- $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$，而公式给出 $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$。同样，$I_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{4}{5!}$。
- $I_{\frac{1}{2}}$ 是半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆（semicircle）$y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}$ 下方的面积，即 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$。
- 数值上，$I_{\frac{3}{2}} \approx 0.073631$，与 $3\pi/128$ 吻合；递推公式亦已用电脑对非整数 $n$（例如 $n = 2.7$）验证过。

## 常见错误

- 忘记检查分部积分中的边界项是否等于零，尤其是在 $x = 0$ 处。
- 写 $\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sin\theta\cos\theta$ 时没有指出在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的正负号。
- 用第 (ii) 部分的阶乘公式计算 $I_{\frac{3}{2}}$，但该公式只对整数证明过；用递推公式才是稳妥的做法。

## STEP 之外

$I_n$ 是贝塔函数（beta function）$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ 的特例，这里 $I_n=B(n+1,n+1)$，而第 (ii) 部分正是 $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ 的整数情况。把 $n=\frac{1}{2}$ 代入这个恒等式，便可得出 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，这就是第 (iii) 部分出现 $\pi$ 的更深层原因。这类积分是统计学中贝塔分布（beta distribution）以及沃利斯（Wallis）的 $\pi$ 乘积公式背后的基础；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多同类风格的递推公式题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。