详细解答

STEP II 2013，第 12 题

概率与统计 • 泊松分布的矩

> **STEP II 2013，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q12

关键思路

X 保留 U 的奇数值，Y 则保留偶数值，因此每个期望值（expectation）都是只取奇数项或只取偶数项的泊松（Poisson）和。求 $\mathrm{E}(U)$ 和 $\mathrm{E}(U(U-1))$ 的技巧依然适用：把 k 或 $k(k-1)$ 与 $k!$ 约去，再提出 λ 或 λ^2。k 每减少一，奇偶便互换一次，这正是 α 与 β 互换位置的原因。另外留意 $\alpha+\beta=\mathrm{e}^{\lambda}$，所以因子 $\mathrm{e}^{-\lambda}$ 就是 $1/(\alpha+\beta)$。

解答

全文中，对 $k=0,1,2,\ldots$，$\mathrm{P}(U=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$，其中 $\lambda>0$。把两个级数（series）逐项相加，得

$$\alpha+\beta=\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{\lambda},\qquad \text{所以}\qquad \mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

（事实上 $\alpha=\cosh\lambda$，而 $\beta=\sinh\lambda$。）

第 (i) 部分

除非 U 是奇数，否则 X 为 0，所以只有奇数 k 有贡献：

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k\text{ 为奇数}}k\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\sum_{k\text{ 为奇数}}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\cdots\right),$$

因为 $k-1$ 取遍 $0,2,4,\ldots$。所以

$$\mathrm{E}(X)=\frac{\lambda\alpha}{\alpha+\beta}.$$

同理，Y 取的是偶数 $k \geq 2$（$k = 0$ 那一项本来就是零），此时 $k-1$ 取遍 $1, 3, 5, \ldots$：

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{k \text{ 为偶数}, k \geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda\beta}{\alpha+\beta}.$$

验证一下：$\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \lambda = \mathrm{E}(U)$，理应如此，因为 $X + Y = U$。

第 (ii) 部分

> **想一想** 当 k^2 不能与 $k!$ 干净地约去时，怎样求 $k^2\lambda^k/k!$ 的和?

把 $k^2 = k(k-1) + k$ 写出来。$k(k-1)$ 部分约去 $k!$ 的两个因子，而 k 部分约去一个。对奇数 k，$k(k-1)$ 的和由 $k = 3$ 开始（在 $k = 1$ 时该项为零），而 $k-2$ 取遍 $1, 3, 5, \ldots$：

$$\sum_{k \text{ 为奇数}} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \sum_{k \text{ 为奇数}, k \geq 3} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2\beta, \qquad \sum_{k \text{ 为奇数}} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\alpha$$

（第二个和就是第 (i) 部分中的那个）。因此

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda\alpha + \lambda^2\beta\right) = \frac{\lambda\alpha + \lambda^2\beta}{\alpha+\beta},$$

再减去 $\mathrm{E}(X)^2$，得

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\lambda\alpha + \lambda^2\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2},$$

正如所求。

对 Y 而言，奇偶性（parity）互换。对偶数 k，$k(k-1)$ 的和由 $k = 2$ 开始，$k-2$ 取遍 $0, 2, 4, \ldots$，结果是 $\lambda^2\alpha$。k 的和则如第 (i) 部分一样给出 $\lambda\beta$。所以

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\lambda\beta + \lambda^2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}.$$

最后一问。 由于 $X + Y = U$，我们有 $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(U) = \lambda$。把两个方差（variance）相加，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) &= \frac{\lambda(\alpha+\beta) + \lambda^2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \lambda + \lambda^2\frac{(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \lambda + \frac{2\lambda^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}.\end{aligned}$$

> **想一想** 为甚么我们应该预期两边不相等?

一般而言，$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$。此处 $XY = 0$ 恒成立，因为 X、Y 之中最多只有一个非零。所以 $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = -\lambda^2\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2$，与上面

的计算吻合。要等式成立，便需要 $\lambda^2\alpha\beta = 0$。然而对 $\lambda > 0$，有 $\alpha \geq 1$ 及 $\beta \geq \lambda > 0$，所以 $\lambda^2\alpha\beta > 0$。因此**不存在非零的 λ 值**使 $\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X+Y)$：左边总是严格较大。事实上 $\alpha = \cosh\lambda$，$\beta = \sinh\lambda$，所以多出的部分是 $\lambda^2 \sinh 2\lambda / \mathrm{e}^{2\lambda} = \frac{1}{2}\lambda^2\left(1 - \mathrm{e}^{-4\lambda}\right)$。

验算

- 当 $\lambda \to 0$ 时，U 几乎总是 0 或 1，所以 Y 几乎总是 0。的确，$\mathrm{E}(Y) \approx \lambda^2 \to 0$，而 $\mathrm{E}(X) \approx \lambda$。
- 当 λ 很大时，$\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda}$，所以 $\mathrm{E}(X) \approx \mathrm{E}(Y) \approx \frac{1}{2}\lambda$：奇数值与偶数值变得同样可能出现。
- 在 $\lambda = 1$ 时，直接把泊松概率相加，得 $\mathrm{Var}(X) \approx 0.6778$ 及 $\mathrm{Var}(Y) \approx 0.8131$，所以两者之和比 $\mathrm{Var}(U) = 1$ 多出约 $0.4908 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-4})$。两条公式都吻合。

常见错误

- 约去之后弄错奇偶：若 k 是奇数，则 $k-1$ 是偶数（给出 α），而 $k-2$ 是奇数（给出 β）。
- 忘记 $\mathrm{e}^{-\lambda} = 1/(\alpha+\beta)$，以致答案不是题目要求的形式。
- 假设方差可以直接相加。X 和 Y 远非独立（independent）：知道 $X \neq 0$ 便迫使 $Y = 0$。

STEP 之外

把一个级数分拆成偶数部分和奇数部分，就是分解式 $\mathrm{e}^{\lambda} = \cosh\lambda + \sinh\lambda$。借助概率母函数（probability generating functions），这变成例行手续：$G(s)$ 的偶数部分是 $\frac{1}{2}\big(G(s) + G(-s)\big)$。最后用到的协方差（covariance）恒等式，是大学概率课程最早接触的工具之一。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）同时涵盖母函数和协方差。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。