详细解答

# STEP II 2013，第 11 题

力学 · 连续碰撞

**STEP II 2013，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

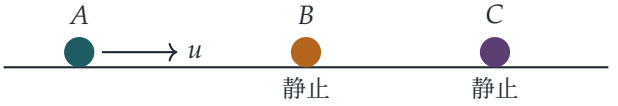
step.maths.org/questions/13-s2-q11

## 关键思路

这里每一次碰撞（collision）都发生在两个质量相等的质点之间，所以每次都是同一个小计算：动量守恒（conservation of momentum）加上牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）。先做一次一般情况，之后重复套用即可。会否再发生碰撞，只取决于后面的质点是否比前面的质点移动得快，因此整道题归结为比较速度。

## 解答

把这些质点视为在光滑（smooth）平面上、质量均为 $m$ 的相同质点，因此在两次碰撞之间没有水平力作用，每个质点都以等速移动。沿直线依次称它们为 $A$、$B$、$C$，其中 $A$ 是被射向 $B$ 和 $C$ 的那个质点。取 $A$ 初始运动的方向为正方向。




### 一般的碰撞

假设一个速度为 $p$ 的质点追上前方一个速度为 $q < p$ 的相同质点，碰撞后两者速度分别为 $p'$ 和 $q'$。由动量守恒（约去 $m$）及恢复定律得

$$p' + q' = p + q, \qquad q' - p' = e(p - q).$$

两式相加及相减，

$$p' = \tfrac{1}{2}[(p+q) - e(p-q)], \qquad q' = \tfrac{1}{2}[(p+q) + e(p-q)]. \tag{$*$}$$

由于 $e > 0$ 且 $p > q$，我们总有 $q' > p'$：碰撞后前方的质点比后方的移动得快，所以除非有其他因素改变其中一个的速度，这两个质点不可能再相遇。

**第 (i) 部分**

**第一次碰撞**（$A$ 撞 $B$）：在 $(*)$ 中代入 $p = u$、$q = 0$：

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

此时 $v_B > v_A$，所以 $A$ 追不上 $B$；但 $B$ 正向静止的 $C$ 移动，所以第二次碰撞是 $B$ 撞 $C$。

**第二次碰撞**（$B$ 撞 $C$）：代入 $p = \tfrac{1}{2}u(1+e)$、$q = 0$：

$$v_B = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}u(1+e)(1-e) = \tfrac{1}{4}u(1-e^2), \qquad v_C = \tfrac{1}{4}u(1+e)^2.$$

$A$ 没有受到影响，所以仍然是 $v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e)$。三个速度都是正数（因为 $0 < e < 1$），所以速率分别为 $\tfrac{1}{2}u(1-e)$、$\tfrac{1}{4}u(1-e^2)$、$\tfrac{1}{4}u(1+e)^2$，正如所求。

**第三次碰撞**。$C$ 比 $B$ 快（由 $(*)$），所以 $B$ 和 $C$ 会分开。唯一可能的下一次碰撞是 $A$ 追上 $B$，而这恰好在 $v_A > v_B$ 时发生：

$$v_A - v_B = \tfrac{1}{4}u(1-e)[2-(1+e)] = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2 > 0,$$

因为 $e \neq 1$。所以 $A$ 在 $B$ 后方且移动得比 $B$ 快，对于 $0 < e < 1$ 中的每一个 $e$，第三次碰撞（$A$ 撞 $B$）都会发生。

**第 (ii) 部分**

**第三次碰撞**（$A$ 撞 $B$）：此时 $p = \tfrac{1}{2}u(1-e)$、$q = \tfrac{1}{4}u(1-e^2)$，所以

$$p+q = \tfrac{1}{4}u(1-e)[2+(1+e)] = \tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e), \qquad p-q = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2.$$

由 $(*)$，$B$ 的新速度为

$$\begin{aligned} v_B &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e) + \tfrac{1}{4}eu(1-e)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)[3+e+e-e^2] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+2e-e^2) = \tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e), \end{aligned}$$

而（为求完整）$v_A = \tfrac{1}{8}u(1-e)[3+e-e(1-e)] = \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+e^2)$，它小于 $v_B$。

**想一想** 第三次碰撞之后，哪些质点对有可能再次碰撞？

$A$ 和 $B$ 刚刚碰撞过，所以由 $(*)$，$B$ 现在比 $A$ 快，两者正在分开。$C$ 仍以 $\tfrac{1}{4}u(1+e)^2$ 移动，而 $C$ 前方再没有其他质点。所以第四次碰撞发生若且唯若 $B$ 追上 $C$，即若且唯若 $v_B > v_C$：

两边除以 $\frac{1}{8}u(1+e)>0$，

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e)>\tfrac{1}{4}u(1+e)^2 &\iff (1-e)(3-e)>2(1+e)\\ &\iff e^2-6e+1>0.\end{aligned}$$

二次式 $e^2-6e+1$ 的根为 $e=3\pm2\sqrt{2}$，它在两根以外取正值。较大的根 $3+2\sqrt{2}$ 大于 1，而 $3-2\sqrt{2}\approx0.172$ 位于 $(0,1)$ 之内。所以，对于 $0<e<1$，

$$\text{发生第四次碰撞} \iff e<3-2\sqrt{2}.$$

当 $e=3-2\sqrt{2}$ 时，$B$ 和 $C$ 以相同速度移动，永不相遇，所以不等式（inequality）是严格的。

## 验算

- 动量：第二次碰撞后总动量为 $\frac{1}{4}u\left[2(1-e)+(1-e^2)+(1+e)^2\right]=\frac{1}{4}u\cdot4=u$，与预期相符。
- 极限情况：当 $e\to1$ 时，两次碰撞后的速度趋向 0、0、$u$（即大家熟悉的“牛顿摆（Newton's cradle）”式速度交换），而 $v_A-v_B\to0$，所以第三次碰撞仅仅勉强发生；临界值 $3-2\sqrt{2}$ 远小于 1，与此一致。
- 数值上，取 $e=0.1$，第三次碰撞后的速度为 $v_B\approx0.3589u$ 和 $v_C=0.3025u$，所以 $B$ 确实追上 $C$；取 $e=0.2$，$v_B=0.336u<v_C=0.36u$，则追不上。以电脑模拟这个运动，证实了对每个 $e>0.1716$ 恰好有三次碰撞，而低于此值则至少有四次。

## 常见错误

- 忘记说明下一次碰撞的是哪一对质点。每次都要检查刚碰撞过的两个质点正在分开，而余下的一对正在接近。
- 恢复定律中的符号弄错：应为（分离速率）$=e\times$（接近速率），所以 $q'-p'=e(p-q)$，左边先写前方质点的速度。
- 保留了根 $3+2\sqrt{2}$，但它在容许范围 $0<e<1$ 之外。

## STEP 之外

规则 $(*)$ 是一个线性映射（linear map），把碰撞前的一对速度映射到碰撞后的一对速度，所以一连串碰撞就是矩阵（matrix）的乘积；问总共会发生多少次碰撞是一个经典问题，对于弹性（elastic）桌球系统，把运动“展开”成楔形区域中的一条直线，便可得到一个优

美的几何答案。若想看以大学程度的严谨处理碰撞、动量及参考系（frames of reference），可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。