详细解答

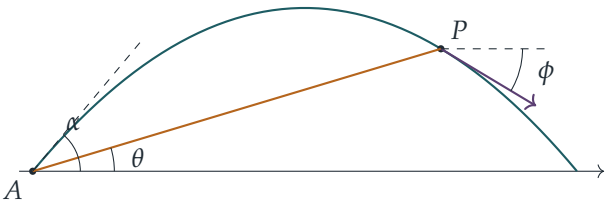
STEP II 2013，第 10 题

力学 • 抛体运动

> **STEP II 2013，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q10

关键思路

写出时间 t 时的位置和速度，便会发现 $\tan\theta$ 和 $\tan\phi$ 都是 t 的线性（linear）函数。(i) 中的恒等式（identity）随即得出，而它把 B 和 C 都转化为关于角的正切的陈述。由于两个角都随时间稳定地减小，“哪一点先到”不过是比较两个数的大小，而 (i) 让我们只需在 B 这一点上作比较。



在一般的点 P，θ 是从 A 看 P 的仰角（angle of elevation），而 ϕ 是速度与水平方向所成的角（图中为负值，因为质点正在下落）。

解答

我们把质点模型化为只受重力 g 作用而自由运动，不计空气阻力（air resistance）。设质点在时间 $t = 0$ 以速率 u 抛出，其中 $0 < \alpha < 90°$。以 A 为原点，在时间 t 时

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad \dot{x} = u\cos\alpha, \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt.$$

当 $y = 0$ 再次成立时质点落地，此时 $t = 2u\sin\alpha/g$。

第 (i) 部分

当 $t > 0$ 时，从 A 看质点的仰角满足

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{ut\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{2u\cos\alpha},$$

而运动方向满足

$$\tan\phi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}.$$

把第一式乘以 2，再利用第二式，

$$2\tan\theta = 2\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha + \left(\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}\right) = \tan\alpha + \tan\phi,$$

得证。

值得记下稍后会用到的结果：记 $k = \dfrac{g}{u\cos\alpha} > 0$，

$$\tan\theta = \tan\alpha - \tfrac{1}{2}kt, \qquad \tan\phi = \tan\alpha - kt, \tag{$*$}$$

因此 $\tan\theta$ 和 $\tan\phi$ 都随时间严格递减。在整个飞行过程中，θ 由 α 减至 0，ϕ 由 α 减至 $-\alpha$，所以 $\theta = \frac{1}{2}\alpha$ 和 $\phi = -\frac{1}{2}\alpha$ 各恰好出现一次：B 和 C 的定义是明确的。

第 (ii) 部分

记 $T = \tan\frac{1}{2}\alpha$；由于 $0 < \frac{1}{2}\alpha < 45^\circ$，我们有 $0 < T < 1$。在 B，$\tan\theta = T$。在 C，$\tan\phi = \tan(-\frac{1}{2}\alpha) = -T$。若 B 和 C 是同一点，则两式在该点同时成立，由 (i) 得

$$2T = \tan\alpha - T, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha = 3T.$$

由二倍角公式（double-angle formula）$\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$，故

$$\frac{2T}{1-T^2} = 3T \implies 2 = 3(1-T^2) \implies T^2 = \tfrac{1}{3},$$

其中我们除以了 T，这是容许的，因为 $T > 0$。取正根，$\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $\frac{1}{2}\alpha = 30^\circ$，且

$$\alpha = 60^\circ.$$

第 (iii) 部分

> ? **想一想** 不计算两个时间，怎样判断哪一点先到达?

由 $(*)$，ϕ 在整个飞行过程中递减。因此 C 在 B 之后到达，当且仅当质点位于 B 的那一刻，ϕ 尚未减至 $-\frac{1}{2}\alpha$；即当 $\tan\phi_B > -T$ 时，其中 ϕ_B 是质点在 B 的运动方向。

在 B，由第 (i) 部分得 $\tan\phi_B = 2\tan\theta - \tan\alpha = 2T - \tan\alpha$。因此

$$B \text{ 先到达} \iff 2T - \tan\alpha > -T \iff \tan\alpha < 3T.$$

再次利用 $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$，并除以 $T > 0$、乘以 $1 - T^2 > 0$（这样不等式的方向不变），

$$\frac{2T}{1-T^2} < 3T \iff 2 < 3 - 3T^2 \iff T^2 < \tfrac{1}{3} \iff \tfrac{1}{2}\alpha < 30^\circ,$$

最后一步成立是因为 tan 在 $(0^\circ, 45^\circ)$ 上递增。每一步都可逆，所以

$$\alpha < 60^\circ \iff B \text{ 比 } C \text{ 先到达.}$$

所以，既然 $\alpha < 60^\circ$，质点会先到达 B。

若你偏好明确写出时间：由 $(*)$，$kt_B = 2(\tan\alpha - T)$ 及 $kt_C = \tan\alpha + T$，而 $t_B < t_C$ 同样等价于 $\tan\alpha < 3T$。

验算

- 在 $t = 0$ 时，$(*)$ 中两条公式都给出 $\tan\alpha$，理应如此：刚抛出时质点沿抛射方向的直线运动。落地时 $kt = 2\tan\alpha$，得 $\tan\theta = 0$ 及 $\tan\phi = -\tan\alpha$，这正是轨迹为人熟知的对称性。
- 当 $\alpha = 60^\circ$ 时，$\tan\alpha = \sqrt{3} = 3\tan 30^\circ$，与 (ii) 一致。
- 取 $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $\alpha = 45^\circ$，公式给出 $t_B \approx 0.845\,\mathrm{s}$ 及 $t_C \approx 1.020\,\mathrm{s}$，所以 B 先到；以电脑逐步数值模拟运动，得出相同的时间，并确认当 $\alpha = 61^\circ$、75° 及 85° 时 C 先到。

常见错误

- 把 θ（质点相对于 A 的方向）当作 ϕ（质点速度的方向）。两者只在抛出的一刻相同。
- 在 C 弄错符号：该处 $\tan\phi = -\tan\frac{1}{2}\alpha$，而不是 $+\tan\frac{1}{2}\alpha$。
- 在 (iii) 中直接断言答案，却没有解释为何“$\tan\phi_B > -T$”表示 B 先到。支持这一点的正是 ϕ 的单调递减（monotonic decrease）。

STEP 之外

(i) 中的恒等式说明：从 A 到抛物线（parabola）上任一点的弦（chord），其斜率等于两端点切线斜率的平均值，这是二次函数的特殊性质（相当于均值定理（mean value theorem），

而且中间点被准确定在正中)。在大学一年级的力学课程中, 研究斜面 (inclined plane) 上的抛射体 (projectile) 问题时会遇到同样的想法, 那里从抛出点出发的直线所成的角, 所扮演的角色正与这里的 θ 完全相同。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics* (《力学导论》) 是很好的参考书，可看到抛射体问题以这种严谨方式处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有 (©)，本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。