详细解答

STEP II 2013，第 1 题

纯数学 · 对数曲线的弦

STEP II 2013，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q1

本题在 *Beyond STEP* 第 3.5 节 π^e 还是 e^π？中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/pi-e-or-e-pi.html

关键思路

这里每一条不等式，都是比较 p^q 与 q^p。取对数（logarithm）再除以 pq，就变成比较 $\frac{\ln p}{p}$ 与 $\frac{\ln q}{q}$；而 $\frac{\ln x}{x}$ 正是由原点连到曲线上点 $(x, \ln x)$ 的直线的斜率（gradient）。因此整道题都围绕与 $y = \ln x$ 相交的直线和弦（chord）。我们需要的事实是：这条曲线是凹（concave）的（即向下弯曲），而且由原点出发的切线（tangent）在 $x = \mathrm{e}$ 处与曲线相切。

解答

第 (i) 部分

设 $y = mx$ 在 $x = x_0$ 处与 $y = \ln x$ 相切。两者斜率相同，而且曲线相交，所以

$$m = \frac{1}{x_0}, \qquad mx_0 = \ln x_0.$$

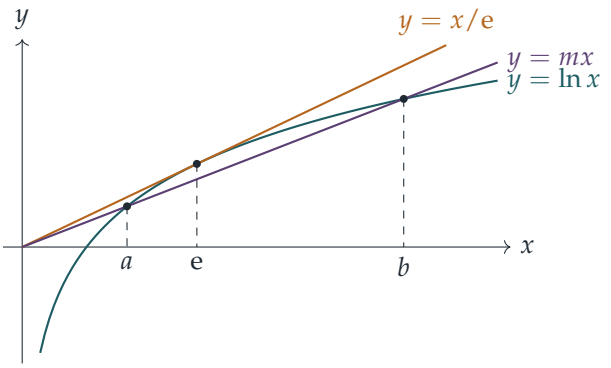
由第一条方程得 $mx_0 = 1$，所以 $\ln x_0 = 1$，$x_0 = \mathrm{e}$，以及

$$m = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

现在设 $y = mx$ 与曲线相交于 $x = a$ 及 $x = b$。那么 $\ln a = ma$ 及 $\ln b = mb$，所以（因为 $a, b > 0$）

$$\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b} \implies b \ln a = a \ln b \implies \ln\left(a^b\right) = \ln(b^a),$$

由于 ln 是一一对应（one-to-one）的，故 $a^b = b^a$，得证。



关于草图：若 $m \le 0$，由于此时 $\ln x - mx$ 严格递增，直线与曲线最多只相交一次。若 $m \ge \frac{1}{\mathrm{e}}$，则对 $x > 0$ 而言，直线就是那条切线或位于切线之上；而凹曲线位于其切线 $y = x/\mathrm{e}$ 之下，只在 e 处相切，所以同样不会有两个交点。因此 $0 < m < \frac{1}{\mathrm{e}}$，直线 $y = mx$ 位于切线之下，如图所示。在 $x = \mathrm{e}$ 处，曲线的高度是 1，直线的高度是 $m\mathrm{e} < 1$，所以该处曲线在直线之上。由于曲线是凹的而直线是直的，$\ln x - mx$ 是凹函数。因此它取正值的集合是单一个区间，其两端正是两个交点 a 和 b。这个区间包含 e，所以 $a < \mathrm{e} < b$。

第 (ii) 部分

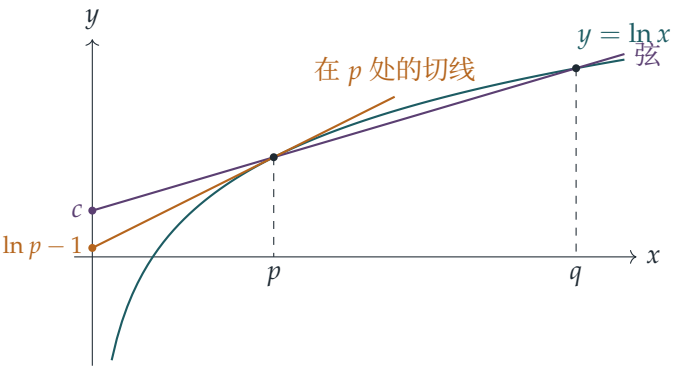
这里 $\ln p = mp + c$ 及 $\ln q = mq + c$，其中 $0 < p < q$。分别除以 p 和 q，得

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

由于 $c > 0$ 且 $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$，我们有 $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$，所以 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$。乘以 $pq > 0$ 得 $q \ln p > p \ln q$，即 $\ln(p^q) > \ln(q^p)$，因此 $p^q > q^p$。

从图像上看，由原点连到 $(p, \ln p)$ 和 $(q, \ln q)$ 的直线，斜率分别是 $\frac{\ln p}{p}$ 和 $\frac{\ln q}{q}$。若弦在原点上方与 y 轴相交，则较近的那一点与 O 所连的直线较陡。（c 的正负决定不等式的方向。我们在第 (iv) 部分会再用到这一点。）

第 (iii) 部分



设经过 $P = (p, \ln p)$ 和 $Q = (q, \ln q)$ 的弦的斜率为 s，y 截距（intercept）为 c，所以 $c = \ln p - sp$。由于曲线是凹的，由 P 连到更右方一点的弦，比 P 处的切线平缓，所以

$$s < \frac{1}{p}.$$

（又或者，由中值定理（mean value theorem），对某个 $\xi \in (p, q)$ 有 $s = \frac{1}{\xi}$，而 $\frac{1}{\xi} < \frac{1}{p}$。）$P$ 处的切线是 $y = \ln p + \frac{1}{p}(x - p)$，它与 y 轴相交于 $\ln p - 1$。弦和切线都经过 P，而弦较平缓。所以由 P 向左移到 $x = 0$ 的过程中，弦一直在切线之上：

$$c = \ln p - sp > \ln p - 1 \geq 0,$$

最后一步用了 $p \geq \mathrm{e}$。所以弦在 y 取正值之处与 y 轴相交。

? **想一想** 这样如何判断 π^{e} 与 e^{π} 的大小?

取 $p = \mathrm{e}$ 和 $q = \pi$，它们满足 $\mathrm{e} \leq p < q$。这条弦的 $c > 0$，所以可应用第 (ii) 部分，得 $p^q > q^p$：

$$\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}.$$

第 (iv) 部分

现在经过 $(p, \ln p)$ 和 $(q, \ln q)$ 的弦的斜率是 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以它是 $y = \frac{x}{\mathrm{e}} + c$，其中

$$c = \ln p - \frac{p}{\mathrm{e}}.$$

直线 $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$ 就是第 (i) 部分中在 $x = \mathrm{e}$ 处的切线，而凹曲线位于它之上或之下——准确地说是在它上面或下方，即 $\ln x \leq \frac{x}{\mathrm{e}}$，等号只在 $x = \mathrm{e}$ 时成立。所以 $c \leq 0$，而 $c = 0$ 只在 $p = \mathrm{e}$ 时出现。但 $c = 0$ 会令弦就是切线本身，而切线只在 e 处与曲线相交，并非在两点 $p < q$ 相交。因此

$$c < 0.$$

这条弦与切线平行，并位于切线之下。现在把第 (ii) 部分的论证反转符号再做一次：

$$\frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{q}.$$

由于 $c < 0$ 且 $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$，得 $\frac{c}{p} < \frac{c}{q}$，所以 $\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$。乘以 $pq > 0$ 得 $q \ln p < p \ln q$，因此

$$q^p > p^q.$$

（与第 (i) 部分一样，凹性在这里也迫使 $p < \mathrm{e} < q$，但论证并不需要这一点。）

验算

- $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23.14$ 而 $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22.46$，与第 (iii) 部分一致。
- 第 (i) 部分：$a = 2$、$b = 4$ 这一对满足 $2^4 = 4^2$，而且确实 $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$ 及 $2 < \mathrm{e} < 4$。
- 第 (iv) 部分：取 $p = 1$，由弦的斜率 $\frac{\ln q}{q-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 得 $q \approx 5.76$。于是 $q^p \approx 5.76 > 1 = p^q$。
- 第 (ii) 和第 (iii) 部分亦已用电脑对大量随机的弦作检验确认。

常见错误

- 把 $q \ln p > p \ln q$ 的方向弄反。乘以 pq 之前，先清楚写出 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$。
- 在第 (iii) 部分，只写到“曲线是凹的”便停下，没有解释为何截距是正数。p 处的切线与轴相交于 $\ln p - 1 \geq 0$，而弦在它之上穿过。
- 在第 (iv) 部分，忘记排除 $c = 0$，而这是得到严格不等式所必需的。

STEP 之外

函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在 e 处取得最大值，这解释了著名的一对 $2^4 = 4^2$。方程 $x^y = y^x$ 在 $x \neq y$ 时的正数解构成一条曲线，可以参数化（parametrise）为 $x = t^{1/(t-1)}$、$y = t^{t/(t-1)}$。更一般地说，“凹函数的弦位于曲线之下、切线之上”是凸性（convexity）的基本不等式。它是延森不等式（Jensen's inequality）和算术–几何平均不等式（AM–GM inequality）的基础。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）对中值定理和凸函数有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。