详细解答

STEP I 2013，第 9 题

力学 · 抛体与碰撞

STEP I 2013，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

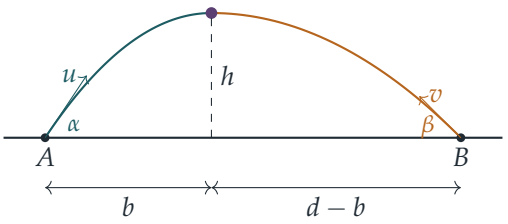
step.maths.org/questions/13-s1-q9

关键思路

抛射体（projectile）在飞行的最高点没有铅直速度，所以若在该处发生碰撞，之后落回地面所需的时间就等于上升所用的时间。要落回出发点，每个质点必须在同样的时间内走回原来的水平路程，这就迫使它的水平速度刚好反向。把这一点代入动量守恒（conservation of momentum），再利用两个质点在同一时刻到达最高点这个事实，其余结果便顺理成章。

解答

我们把 A 和 B 视为只受重力作用而自由运动的质点，不计空气阻力（air resistance），而碰撞时的冲量（impulse）沿连心线（line of centres）作用。由于这是直接碰撞（direct collision），而碰撞一刻两个质点都在水平运动，所以这个冲量是水平的。取 x 轴沿平面、由 A 的出发点指向 B 的出发点，于是 B 从 $x = d$ 出发。



在最高点相遇

A 的铅直速度是 $u\sin\alpha - gt$，所以它在时间 $t = u\sin\alpha/g$ 到达最大高度。同理，B 在 $t = v\sin\beta/g$ 时最高。两者同时抛出，并在各自处于最高点时相撞，因此这两个时间相

等：

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad \text{所以} \qquad u\sin\alpha = v\sin\beta. \tag{1}$$

碰撞前一刻，A 的速度是沿正 x 方向的 $u\cos\alpha$，B 的速度是沿负 x 方向的 $v\cos\beta$；两者都没有铅直速度。

碰撞之后

> **想一想** 我们对恢复系数（coefficient of restitution）一无所知，又怎能对碰撞后的速度说出甚么来？

关键在于“返回原点”这个条件。冲量是水平的，所以碰撞后一刻 A 的铅直速度仍然是零，位置在平面上方高度 h 处。（在铅直方向上）由静止下落 h 所需的时间，恰好等于上升 h 所用的时间，即 T。在这段时间内，A 必须在水平方向由 $x = b$ 回到 $x = 0$，其中 $b = u\cos\alpha\, T$ 是它上升途中走过的水平距离。所以它新的水平速度是

$$-\frac{b}{T} = -u\cos\alpha :$$

A 的水平速度刚好反向，同理 B 的也是如此。（事实上，每个质点都沿自己原来的路径倒退回去。）

现在，x 方向的动量守恒给出

$$mu\cos\alpha - Mv\cos\beta = -mu\cos\alpha + Mv\cos\beta, \qquad \text{所以} \qquad mu\cos\alpha = Mv\cos\beta. \tag{2}$$

换言之，碰撞前后的总动量都是零。以 (1) 除 (2)——这是容许的，因为 α 和 β 都严格介于 0 与 $\frac{1}{2}\pi$ 之间，所以 (1) 的两边都不为零——得

$$m\cot\alpha = M\cot\beta,$$

此即所求。

碰撞发生的位置

在时间 T 内，A 走过水平距离 $b = u\cos\alpha\, T$，B 则走过 $v\cos\beta\, T$。两者合起来刚好走完两者之间的距离，所以

$$u\cos\alpha\, T + v\cos\beta\, T = d.$$

由 (2)，$v\cos\beta = \dfrac{m}{M}u\cos\alpha$，所以

$$b\left(1 + \frac{m}{M}\right) = d \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{Md}{m+M},$$

此即所求。（B 越重，它的水平速度就越慢，相遇点便离 A 的出发点越远。）

碰撞的高度

对 A 在铅直方向使用 $v^2 = u^2 + 2as$，得最大高度为

$$h = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}, \qquad \text{而} \qquad b = u\cos\alpha \cdot \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

两式相除，

$$\frac{h}{b} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\tan\alpha, \qquad \text{所以} \qquad h = \tfrac{1}{2} b \tan\alpha.$$

验算

- 对称性：当 $m = M$ 时，得 $\alpha = \beta$ 及 $b = \frac{1}{2}d$，所以两个质点在正中间相遇，理应如此。
- 高度公式表明，由 A 的出发点到其路径最高点的连线，斜率是 $\frac{1}{2}\tan\alpha$，即抛射时斜率的一半：这正是一个熟悉的事实——抛物线（parabola）在起点的切线与对称轴（axis of symmetry）相交之处，高度是顶点高度的两倍。对 B 作同样的计算，得 $h = \frac{1}{2}(d - b)\tan\beta$；这与 $\frac{1}{2}b\tan\alpha$ 吻合，原因正是 $m\cot\alpha = M\cot\beta$。
- 数值验证：取 $m = 1$、$M = 2$、$\alpha = 45°$、$u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。于是 $\cot\beta = \frac{1}{2}$，$v = \sqrt{50}/\sin\beta \approx 7.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，$d \approx 7.65\,\mathrm{m}$，从而 $b = \frac{2}{3}d \approx 5.10\,\mathrm{m}$，$h = \frac{1}{2}b \approx 2.55\,\mathrm{m}$。用电脑把两个运动逐步向前推算，并在碰撞时把水平速度反向，结果证实两个质点确实在此点、各自处于最高点时相遇，而且都落回各自的出发点。

常见错误

- 试图使用恢复系数：题目没有给出，也根本不需要，因为返回原点的条件已经确定了碰撞后的速度。
- 忘记两个质点必须同时到达最高点，而正是这一点给出 (1)；没有它，就无法得出余切（cotangent）。
- 动量方程中的正负号错误：碰撞前 B 是沿负方向运动的。

STEP 之外

返回原点的条件其实就是时间反演（time reversal）：在重力作用下，牛顿（Newton）的运动方程即使把时钟倒转，形式也不变，所以把质点的速度反向，它就会沿自己原来的路径返回。这里总动量为零，意味着我们身处质心参考系（centre-of-mass frame）之中；在这个参考系里，弹性碰撞（elastic collision）只会把两个速度反向，与这里发生的情况完

全一样（所以这次碰撞是完全弹性的）。质心参考系和守恒定律在 Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）中有精彩的探讨。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。