详细解答

STEP I 2013，第 8 题

纯数学 · 复合函数

STEP I 2013，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s1-q8

关键思路

合成函数（composite function）pq 的意思是“先做 q，再做 p”，而且只有在 q 的输出落在 p 的定义域（domain）之内时才有定义。因此，定义域来自 q（有需要时再加以收窄），而值域（range）则要问 p 实际上接收到哪些值才能求得。代数运算并不繁重；得分关键在于小心处理 $\sqrt{x^2} = |x|$ 以及各个定义域。在第 (iii) 部分，恒等式 $(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1$ 帮了大部分的忙。

解答

第 (i) 部分

- $\mathrm{cb}(x) = \mathrm{c}(\ln x) = 2\ln x$。定义域就是 b 的定义域，即 $x > 0$，而 c 接受任何实数。由于 $\ln x$ 取遍所有实数值，$2\ln x$ 亦然：值域是 $\mathbb{R}$。
- $\mathrm{ab}(x) = (\ln x)^2$，定义域为 $x > 0$。由于 $\ln x$ 取遍所有实数值，其平方便取遍 $[0, \infty)$ 中的每个值（在 $x = 1$ 时取 0）：值域是 $y \geq 0$。
- $\mathrm{da}(x) = \sqrt{x^2} = |x|$，而不是 x，因为平方根号表示非负根（non-negative root）。这里 $x^2 \geq 0$ 恒成立，所以定义域是整个 $\mathbb{R}$，值域是 $y \geq 0$。
- $\mathrm{ad}(x) = (\sqrt{x})^2 = x$，但只限于 $x \geq 0$，因为必须先由 d 作用。所以定义域是 $x \geq 0$，值域是 $y \geq 0$。

留意 da 和 ad 的值域相同，但定义域和公式都不同：它们是不同的函数。

第 (ii) 部分

对于 fg：对每个实数 x，$g(x) = \sqrt{x^2+1} \geq 1$，所以 $g(x)$ 总落在 f 的定义域内。于是

$$fg(x) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x|, \qquad \text{定义域}\mathbb{R}, \quad \text{值域}y \geq 0.$$

对于 gf：f 先作用，所以需要 $|x| \geq 1$；而 g 接受任何输入。于是

$$gf(x) = \sqrt{(x^2-1)+1} = |x|, \qquad \text{定义域}|x| \geq 1, \quad \text{值域}y \geq 1.$$

两条公式同样一致，但函数却不同：gf 的定义域不包括 $-1 < x < 1$，因此其值域由 1 开始。

第 (iii) 部分

基本事实是

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = x^2-(x^2-1) = 1,$$

所以当 $x \geq 1$ 时，$h(x)\,k(x) = 1$。

h 的图像（$x \geq 1$）。

- $h(1) = 1$。
- 当 $x > 1$ 时，$h'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$，所以 h 是递增（increasing）的；而当 $x \to 1^+$ 时 $h'(x) \to \infty$，所以曲线以垂直切线（vertical tangent）离开 $(1,1)$。
- 当 $x \to \infty$ 时，$h(x) \to \infty$。至于渐近线（asymptote），

  $$h(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \to 0^-,$$

  所以 $y = 2x$ 是一条渐近线，曲线从下方趋近它。

因此 h 由 1 开始连续递增，且无上界：其值域是 $[1,\infty)$。

k 的图像，$x \geq 1$ 的分支。

- $k(1) = 1$，而且由基本事实，$k(x) = 1/h(x)$。
- 由于 h 是正数并递增至无限大，k 是正数并递减，且 $k(x) \to 0^+$。所以 $y = 0$ 是一条渐近线，曲线从上方趋近它。
- 当 $x \to 1^+$ 时，$k'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to -\infty$：在 $(1,1)$ 处同样有一条垂直切线，这分支就在该点与 h 的图像相接。

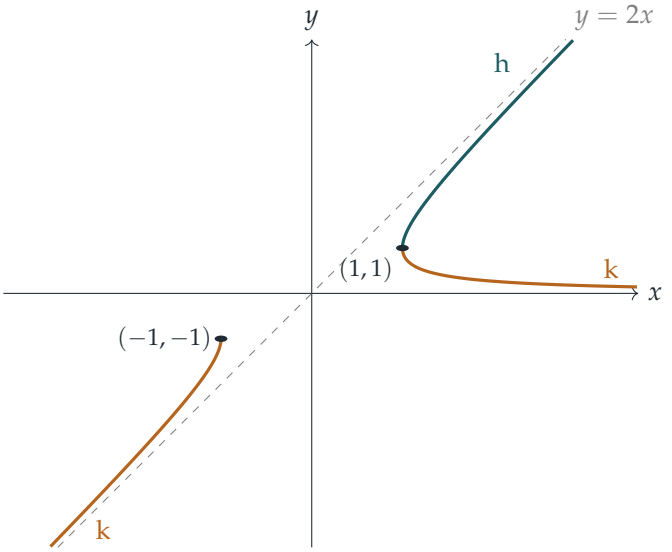
k 的图像，$x \le -1$ 的分支。

- $\mathrm{k}(-1) = -1$。
- 当 $x < -1$ 时有 $x < 0$，所以 $\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 1 > 0$：k 是递增的。当 $x \to -1^-$ 时，$\mathrm{k}'(x) \to +\infty$，所以在 $(-1,-1)$ 处有一条垂直切线。
- x 和 $-\sqrt{x^2-1}$ 都是负数，所以当 $x \to -\infty$ 时 $\mathrm{k}(x) \to -\infty$。设 $x = -u$，其中 $u \ge 1$，

$$\mathrm{k}(x) - 2x = u - \sqrt{u^2-1} = \frac{1}{u + \sqrt{u^2-1}} \to 0^+,$$

所以 $y = 2x$ 亦是这分支的渐近线，曲线从上方趋近它。

这分支取遍 $(-\infty, -1]$ 中的每个值。



（有一个巧妙的方法可以一次看清这一切：设 $x = \cosh t$，其中 $t \ge 0$。那么 $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$，所以 $\mathrm{h}(x) = e^t$ 而 $\mathrm{k}(x) = e^{-t}$；对于 $x = -\cosh t$，则 $\mathrm{k}(x) = -e^t$。）

合成函数 kh。 h 的定义域是 $x \ge 1$，而每个值 $\mathrm{h}(x)$ 都满足 $\mathrm{h}(x) \ge 1$，落在 k 的定义域内。所以 kh 在整个 $x \ge 1$ 上都有定义。

? **想一想** kh 实际上用到 k 图像的哪一部分?

只用到 $x \ge 1$ 的分支，因为 h 从不输出小于 1 的值。此外，h 取遍 $[1,\infty)$ 中的每一个值，所以 kh 所取的值正好就是 k 在 $[1,\infty)$ 上的值。在这分支上，k 由 $\mathrm{k}(1) = 1$ 开始连续递减趋向 0，但永远达不到 0（因为 $\mathrm{k} = 1/\mathrm{h} > 0$）。因此

$$\mathrm{kh}: \quad \text{定义域} x \ge 1, \qquad \text{值域} 0 < y \le 1.$$

从双曲函数（hyperbolic function）的角度看，$\mathrm{kh}(\cosh t) = \mathrm{k}(e^t)$，这是 t 的递减函数，在 $t = 0$ 时由 1 开始。

验算

- 代入数值：$\mathrm{h}(2) = 2 + \sqrt{3} \approx 3.732$，$\mathrm{k}(2) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$；两者之积为 1。另外 $\mathrm{k}(-2) = -2 - \sqrt{3} \approx -3.732$，略高于 $2x = -4$，正如渐近线分析所预测。
- $\mathrm{kh}(1) = \mathrm{k}(1) = 1$，而 $\mathrm{kh}(2) = \mathrm{k}(3.732\ldots) = 3.732 - \sqrt{3.732^2 - 1} \approx 0.136$，落在 $(0, 1]$ 之内。
- 当 $x = 1000$ 时，$\mathrm{h}(x) - 2x \approx -0.0005$，$\mathrm{k}(x) \approx 0.0005$，与 $-1/(2x)$ 和 $1/(2x)$ 吻合。

常见错误

- 写成 $\sqrt{x^2} = x$。其实应是 $|x|$，这正是 da、fg 和 gf 都不是恒等函数（identity function）的原因。
- 因为最终公式 $|x|$ 处处有意义，便把 gf 的定义域写成 $\mathbb{R}$。合成函数的定义域由最先作用的函数决定。
- 遗漏了 k 在 $x \leq -1$ 的第二个分支，或遗漏了它的渐近线 $y = 2x$。

STEP 之外

在大学里，函数是一个三元组：定义域、上域（codomain）和对应法则。两个法则相同但定义域不同的函数，例如这里的 fg 和 gf，确实是不同的函数；一旦讨论反函数（inverse function）、单射性（injectivity）和满射性（surjectivity），这种严谨就变得非常重要。函数 h 就是 $e^{\operatorname{arcosh} x}$，而 $\ln \mathrm{h}(x)$ 正是 $\operatorname{arcosh} x$ 的标准公式。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）正是以这种细致的态度处理函数、连续性（continuity）和单调性（monotonicity）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。