详细解答

STEP I 2013，第 7 题

纯数学 · 一阶微分方程

> **STEP I 2013，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q7

关键思路

在 (i) 和 (ii) 中，右方只取决于比值 y/x，所以设 $y = ux$ 便可把方程化为可分离变量 (separation of variables) 的形式。第 (iii) 部分打破了这个模式，因为 x^2/y 并非单单是 y/x 的函数。解决方法是问：解“应该”表现得像 x 的哪一个幂？平衡两项后得出 $y = u\,x^{3/2}$，于是一切又可以分离变量。

解答

第 (i) 部分

设 $y = ux$，由乘积法则（product rule）得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。由于 $x/y = 1/u$ 及 $y/x = u$，方程变为

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}.$$

u 项互相抵消，这正是这个代换（substitution）奏效的原因。分离变量（由于 $x > 0$，可以除以 x），

$$\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}u^2 = \ln x + C,$$

因为 $x > 0$，所以写 $\ln x$ 而非 $\ln|x|$。当 $x = 1$ 时 $y = 2$，所以 $u = y/x = 2$，得 $2 = 0 + C$。因此

$$u^2 = 4 + 2\ln x.$$

由于 $y > 0$ 及 $x > 0$，必有 $u > 0$，所以取正根 $u = \sqrt{4 + 2\ln x}$，从而

$$y = x\sqrt{4 + 2\ln x}.$$

这要求 $4+2\ln x>0$（我们需要 $y>0$，而不只是 $y\geq 0$），即 $\ln x>-2$，亦即 $x>\mathrm{e}^{-2}$。这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

右方同样是 y/x 的函数，所以用同一个代换 $y=ux$：

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+2u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+u=\frac{1+u^2}{u}.$$

这次 u 项没有抵消，但变量仍然可以分离：

$$\int\frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+C,$$

其中左方的积分属 $\frac{1}{2}\int f'/f$ 的形式，而 $1+u^2>0$，无需加绝对值（modulus）。在 $x=1$ 时 $u=2$，所以 $C=\frac{1}{2}\ln 5$。乘以 2 再取指数，

$$1+u^2=5x^2, \qquad \text{所以} \qquad u=\sqrt{5x^2-1}$$

（因 $u>0$，取正根）。因此

$$y=x\sqrt{5x^2-1} \qquad (x>\tfrac{1}{\sqrt{5}}),$$

这个限制来自 $5x^2-1>0$ 及 $x>0$。

第 (iii) 部分

现在 $y=ux$ 给出 $x^2/y=x/u$，当中仍单独含有 x，所以方程不能分离变量。我们想找一个代换，使右方两项以相同方式缩放。

> **想一想** 若 y 表现得像幂 x^k，k 取甚么值时 $\dfrac{x^2}{y}$ 与 $\dfrac{2y}{x}$ 的大小相同?

我们需要 x^{2-k} 与 x^{k-1} 相配，所以 $2-k=k-1$，得 $k=\frac{3}{2}$。（此时左方的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 亦表现得像 $x^{1/2}$，所以三项一致。）这启示我们用代换 $y=u\,x^{3/2}$，此时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^{3/2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\tfrac{3}{2}u\,x^{1/2}, \qquad \frac{x^2}{y}=\frac{x^{1/2}}{u}, \qquad \frac{2y}{x}=2u\,x^{1/2}.$$

把整条方程除以 $x^{1/2}$（它是正数），

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\tfrac{3}{2}u=\frac{1}{u}+2u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+\frac{u}{2}=\frac{2+u^2}{2u}.$$

分离变量，

$$\int\frac{2u}{2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \ln(2+u^2)=\ln x+C.$$

在 $x=1$ 时 $u=y/x^{3/2}=2$，所以 $C=\ln 6$，因此 $2+u^2=6x$。取正根 $u=\sqrt{6x-2}$，所以

$$y=x^{3/2}\sqrt{6x-2}=\sqrt{6x^4-2x^3}\qquad (x>\tfrac{1}{3}),$$

其中需要 $x>\frac{1}{3}$ 才能使 $6x-2>0$。

(iii) 的另一解法。把方程乘以 $2y$，并设 $z=y^2$，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}z=2x^2,$$

这是一条线性方程(linear equation)，积分因子(integrating factor)为 x^{-4}。于是 $(x^{-4}z)'=2x^{-2}$，利用 $z(1)=4$ 得 $x^{-4}z=-2/x+6$，所以 $y^2=6x^4-2x^3$，与前相同。同一技巧（$z=y^2$）亦可解 (i) 和 (ii)。

验算

- 每个答案在 $x=1$ 时都给出 $y=2$：$1\cdot\sqrt{4}$、$1\cdot\sqrt{4}$ 及 $\sqrt{6-2}$。
- 把 (ii) 的答案求导后代回原方程。由 $y^2=5x^4-x^2$ 得 $2yy'=20x^3-2x$，所以 $y'=(10x^3-x)/y$。另一方面 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{x^2+2y^2}{xy}=\dfrac{10x^4-x^2}{xy}$，两者相同。
- 在 $x=2$ 时，三个解分别给出 $2\sqrt{4+2\ln 2}\approx 4.642$、$2\sqrt{19}\approx 8.718$ 及 $4\sqrt{5}\approx 8.944$。正如预期，(ii) 中 y/x 的系数较大，使 y 增长得比 (i) 快。

常见错误

- 在 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 中漏掉 u，以致关于 u 的方程出错。
- 把初始条件（initial condition）套用在 y 而非 u 上：这里在 $x=1$ 时两者相同，但在 (iii) 中一般需要用 $u=y/x^{3/2}$。
- 遗漏定义域（domain）。平方根必须是实数且为正，因而得出 $x>\mathrm{e}^{-2}$、$x>1/\sqrt{5}$ 及 $x>\frac{1}{3}$。

STEP 之外

右方只取决于 y/x 的方程称为齐次（homogeneous）方程，而代换 $y=ux$ 总能把它们分离变量。第 (iii) 部分其实是一种经过伪装的缩放对称性（scaling symmetry）：在 $x\mapsto\lambda x$、$y\mapsto\lambda^{3/2}y$ 之下方程不变，而这类缩放对称性总会启示一个使方程可分离变量的代换。形如 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ 的方程，在 $z=y^{1-n}$ 之下会变成线性方程，称为伯努

利方程（Bernoulli equations）；这里三部分都属于此类，且 $n = -1$。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）在一阶方程一章中涵盖了这两类方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。