详细解答

STEP I 2013，第 6 题

纯数学 · 二项式系数与斐波那契数

> **STEP I 2013，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q6

关键思路

帕斯卡法则（Pascal's rule）就是整道题的引擎。每个 B_n 都是若干二项式系数（binomial coefficients）之和；若用帕斯卡法则把 B_{n+2} 的每一项拆开，拆出来的各部分正好可以重新组合成 B_{n+1} 和 B_n 的各项。唯一要小心的是和式的两端：那里帕斯卡法则并不适用，落单的 1 要靠人手配对。由于 B_n 对偶数和奇数 n 的定义不同，我们把两种情况分开处理。

解答

帕斯卡法则

由于 $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$，两边 x^r 的系数相等。左边的系数是 $\binom{n+1}{r}$。右边则是

$$(1+x)\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s + \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^{s+1},$$

当 $1 \le r \le n$ 时，第一个和式贡献 $\binom{n}{r}$（来自 $s=r$），第二个和式贡献 $\binom{n}{r-1}$（来自 $s=r-1$）。因此

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \qquad (1 \le r \le n).$$

递推关系

先看清楚 B_n 是甚么会有帮助：它把帕斯卡三角形（Pascal's triangle）的一条“浅对角线”加起来，即 $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$，一直加到上方数字不小于下方数字的最后一项为止。把三角形靠左排列时，组成 $B_6 = 1+5+6+1 = 13$ 的各项落在一条直线上：

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

（琥珀色带标出了 $\binom{6}{0}, \binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}$。）

偶数情况， $n = 2m$（$m \geq 0$）。我们需要证明 $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$。按定义

$$B_{2m+2} = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j}.$$

两端的项是 $j = 0$，给出 $\binom{2m+2}{0} = 1$；以及 $j = m+1$，给出 $\binom{m+1}{m+1} = 1$。对于 $1 \leq j \leq m$，我们以上方 $2m+1-j$、下方 j 套用帕斯卡法则；这是容许的，因为 $j \leq m$ 推出 $j \leq 2m+1-j$。于是

$$B_{2m+2} = \underbrace{1 + \sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j-1} + 1}_{\text{(b)}}.$$

在 (a) 中，那个 1 就是 $\binom{2m+1}{0}$，即缺少了的 $k = 0$ 项，所以 (a) 等于 $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} = B_{2m+1}$。

> **想一想** 第二个和式应该变成甚么？多出来的那个 1 又该放到哪里？

在 (b) 中令 $i = j - 1$：和式变成 $\sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-i}{i}$，这正是缺了最后一项 $i = m$ 的 B_{2m}。那最后一项是 $\binom{m}{m} = 1$，恰好就是多出来的 1。所以 (b) $= B_{2m}$，从而 $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$。（当 $m = 0$ 时，和式都是空和，式子变成 $2 = 1 + 1$。）

奇数情况， $n = 2m+1$（$m \geq 0$）。我们需要证明 $B_{2m+3} = B_{2m+2} + B_{2m+1}$。此时

$$B_{2m+3} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{2m+3-k}{k}.$$

只有 $k = 0$ 项 $1 = \binom{2m+2}{0}$ 保持不动。对于 $1 \leq k \leq m+1$，以上方 $2m+2-k$、下方 k 套用帕斯卡法则是容许的，因为 $k \leq m+1$ 推出 $k \leq 2m+2-k$。因此

$$\begin{aligned}
B_{2m+3} &= \binom{2m+2}{0} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j} + \sum_{i=0}^{m} \binom{2m+1-i}{i} \qquad (i = k-1) \\
&= B_{2m+2} + B_{2m+1}.
\end{aligned}$$

这一次没有剩下任何端项。

每个 $n \geq 0$ 都可写成 $2m$ 或 $2m+1$ 的形式，所以对所有 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 都有 $B_{n+2} - B_{n+1} = B_n$，此即所求。

与斐波那契数的关系

直接计算可得 $B_0 = \binom{0}{0} = 1$ 及 $B_1 = \binom{1}{0} = 1$。斐波那契数（Fibonacci numbers）由 $F_1 = 1$、$F_2 = 1$ 开始。所以 $B_0 = F_1$、$B_1 = F_2$，而两个数列都服从同一条递推关系（recurrence）："每一项等于前两项之和"。由数学归纳法（induction）（若 $B_n = F_{n+1}$ 且 $B_{n+1} = F_{n+2}$，则 $B_{n+2} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$），

$$B_n = F_{n+1} \qquad \text{对所有} n \geq 0.$$

数列 B 就是把斐波那契数列移后一位：$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$。

验算

- 直接由定义计算几项：$B_2 = 1 + 1 = 2$，$B_3 = 1 + 2 = 3$，$B_4 = 1 + 3 + 1 = 5$，$B_5 = 1 + 4 + 3 = 8$。这些就是 $F_3, \ldots, F_6$。
- 较大的一项：$B_9 = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4} = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55 = F_{10}$。
- 抽查帕斯卡法则：$\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10 + 5 = 15 = \binom{6}{2}$。

常见错误

- 对 $\binom{m+1}{m+1}$ 这类端项套用帕斯卡法则，这样会得出 $\binom{m}{m+1}$，超出了法则已获证明的范围 $1 \leq r \leq n$。应先把端项分离出来。
- 只处理一种奇偶性（parity）。B_{2m} 和 B_{2m+1} 的定义不同，而递推关系把偶数下标的项与奇数下标的项联系起来，所以两种情况都必须处理。
- 弄错下标的位移：答案是 $B_n = F_{n+1}$，而不是 $B_n = F_n$（检查一下 $B_0 = 1 \neq F_0$）。

STEP 之外

恒等式 $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$ 有一个漂亮的计数证明：两边都在计算用正方形和骨牌（dominoes）铺满一条 $1 \times n$ 长条的方法数（k 是骨牌的数目，而在 $n - k$ 块砖之中选出骨牌的位置，就得到 $\binom{n-k}{k}$）。以两种方法计算同一个集合来证明恒等式（counting in two ways），是大学组合学（combinatorics）的核心技巧；生成函数（generating function）的观点亦

然，在这观点下 $\sum F_n x^n = x/(1-x-x^2)$。如想深入了解，可以读 Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函数学》），或 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。