详细解答

STEP I 2013，第 5 题

纯数学 · 圆锥曲线与旋转

STEP I 2013，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s1-q5

关键思路

唯一随 k 改变的是 xy 项，而它决定了曲线的类型。若没有 xy 项，便可以对 x 和 y 分别配方（completing the square）。若二次部分可以因式分解（factorise），整条方程有可能分解成两条直线。而若二次部分是完全平方（perfect square）$(x+y)^2$，把坐标轴旋转（rotate）$45°$ 就能把 $x+y$ 变成单一个坐标，剩下一条熟悉的抛物线（parabola）。

另外留意，设 $x=0$ 或 $y=0$ 都会令 xy 项消失，所以对任何 k，与坐标轴的截距（intercept）都相同：$x^2+3x=0$ 给出 $x=0$ 或 $x=-3$，而 $y^2+y=0$ 给出 $y=0$ 或 $y=-1$。每一条轨迹（locus）都经过 $(0,0)$、$(-3,0)$ 和 $(0,-1)$。

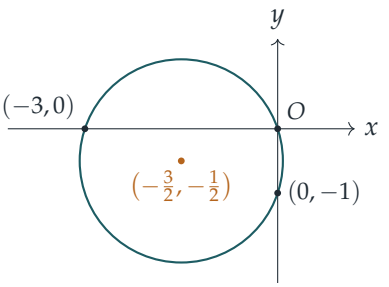
解答

第 (i) 部分

当 $k=0$ 时，对每个变量配方，得

$$(x+\tfrac{3}{2})^2+(y+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{2}.$$

所以轨迹是圆心为 $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$、半径为 $\sqrt{5/2}\approx 1.58$ 的圆。它与 x 轴相交于 $(0,0)$ 和 $(-3,0)$，与 y 轴相交于 $(0,0)$ 和 $(0,-1)$。（原点和 $(-3,0)$ 是一条弦（chord）的两个端点，所以圆心位于该弦的垂直平分线（perpendicular bisector）$x=-\frac{3}{2}$ 上，理应如此。）



第 (ii) 部分

当 $k=\frac{10}{3}$ 时，两边乘以 3：

$$3x^2+3y^2+10xy+9x+3y=0.$$

二次部分可因式分解为

$$3x^2+10xy+3y^2=(3x+y)(x+3y),$$

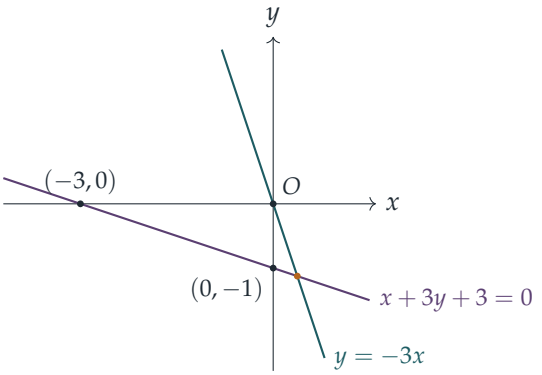
而一次部分是 $9x+3y=3(3x+y)$，同样含有因式 $3x+y$。所以

$$(3x+y)(x+3y)+3(3x+y)=(3x+y)(x+3y+3)=0.$$

乘积为零当且仅当其中一个因式为零，所以轨迹是一对直线

$$y=-3x \qquad \text{和} \qquad x+3y+3=0.$$

第一条直线经过原点（这是它与两条坐标轴唯一的交点）。第二条直线与 x 轴相交于 $(-3,0)$，与 y 轴相交于 $(0,-1)$。联立两条方程，得 $x-9x+3=0$，所以两线相交于 $\left(\frac{3}{8},-\frac{9}{8}\right)$。



第 (iii) 部分

当 $k = 2$ 时，方程为

$$(x+y)^2 + 3x + y = 0.$$

当 $\theta = 45°$ 时，$\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

因此 $x + y = \sqrt{2}\,X$ 及 $y - x = \sqrt{2}\,Y$，把两式相加和相减，得

$$x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

? **想一想** 为甚么我们需要以 X 和 Y 表示 x 和 y，而不是反过来?

我们知道 P 在曲线上，而要求的是 Q 所满足的方程。所以必须把 x 和 y 代入 P 的轨迹方程，这就需要以 X 和 Y 来表示它们。（由于这个映射是旋转，其逆映射（inverse）就只是反方向的旋转，所以这一步很容易。）

一次部分变成

$$3x + y = \frac{3X - 3Y + X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{4X - 2Y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y,$$

而 $(x+y)^2 = 2X^2$。所以 Q 的轨迹是

$$2X^2 + 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}\,Y = 2X^2 + 2\sqrt{2}\,X = \left(\sqrt{2}\,X + 1\right)^2 - 1,$$

正如所求。每一步都是可逆的，所以这正正就是 Q 的轨迹。

这是 (X, Y) 平面上的一条抛物线，开口朝 Y 增加的方向。它关于 $\sqrt{2}\,X + 1 = 0$ 即 $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 这条直线对称，顶点（vertex）位于 $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$。

现在把旋转还原。Q 是由 P 顺时针旋转 45° 得到的，所以 P 的轨迹就是把这条抛物线逆时针旋转 45°。以 x 和 y 表示：

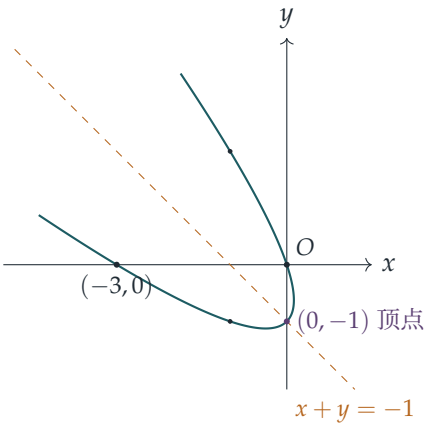
- 对称轴（line of symmetry）$X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 即 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，也就是

$$x + y = -1;$$

- 顶点位于 $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}} = 0$，$y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} = -1$，即 $(0, -1)$；
- 抛物线开口朝 $Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ 增加的方向，即 $(-1, 1)$ 的方向：向左上方。

截距是 $(0,0)$、$(-3,0)$ 和 $(0,-1)$，正如开首所述；其中 $(0,-1)$ 是顶点。该处的切线（tangent）垂直于对称轴，所以斜率（gradient）为 1：曲线在顶点处穿过 y 轴，而不是与之相切。作为对称性的验证，关于 $x+y=-1$ 的反射（reflection）把 (a,b) 映到 $(-1-b,-1-a)$，所以原点映到 $(-1,-1)$，而 $(-3,0)$ 映到 $(-1,2)$；两点都满足 $(x+y)^2+3x+y=0$。

绘图时，设 $u=x+y$ 会有帮助：这样 $3x+y=-u^2$，解得 $x=-\frac{1}{2}(u^2+u)$，$y=\frac{1}{2}(u^2+3u)$。



P 的轨迹是一条顶点为 $(0,-1)$、对称轴为 $x+y=-1$ 的抛物线。

验算

- 把截距点 $(0,0)$、$(-3,0)$、$(0,-1)$ 代入全部三条方程：无论 k 为何值，结果都是 0。
- 在 (ii) 中，展开 $(3x+y)(x+3y+3)$ 再除以 3，便得回 $k=\frac{10}{3}$ 时的原方程。交点 $\left(\frac{3}{8},-\frac{9}{8}\right)$ 同时满足 $3x+y=0$ 和 $x+3y+3=0$。
- 在 (iii) 中，取 $u=1$：点 $(-1,2)$ 在 P 的轨迹上。于是 $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$Y=\frac{3}{\sqrt{2}}$，而 $\sqrt{2}\,Y=3=(1+1)^2-1$。

常见错误

- 在 (iii) 中，把 X,Y 的公式代入方程，而不是以 X,Y 表示 x,y。
- 把抛物线向错误方向旋转回去，得出对称轴为 $y-x=-1$，而非 $x+y=-1$。
- 在 (ii) 中，没有发现一次项含有公因式 $3x+y$，因而把轨迹当作其他类型的圆锥曲线。

STEP 之外

每条方程 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 都是一条圆锥曲线（conic），其类型由二次部分的判别式（discriminant）$b^2 - 4ac$ 决定：负数时是椭圆（ellipse）（这里 $k = 0$ 时是圆），零时是抛物线（$k = 2$），正数时是双曲线（hyperbola），而双曲线可以退化（degenerate）成一对直线（$k = \frac{10}{3}$）。在大学一年级的线性代数（linear algebra）课程中，你会学到如何有系统地消去 xy 项：把坐标轴旋转到二次型（quadratic form）所对应的对称矩阵（symmetric matrix）的特征向量（eigenvectors）方向。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）对此有清晰的解释。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。