详细解答

STEP I 2013，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 2013，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s1-q4

关键思路

在第 (i) 部分，每个被积函数（integrand）都是“某个式子的函数，乘以该式子的导数（derivative）”：$\sec^2 x$ 是 $\tan x$ 的导数，而 $\sec x \tan x$ 是 $\sec x$ 的导数。在第 (ii) 部分，多出来的因子 x 或 x^2 提示我们要用分部积分法（integration by parts）。我们要积分的是三角函数那个因子，而第 (i) 部分刚好示范了该怎样积。

解答

第 (i) 部分

对第一个积分，作代换（substitution）$u = \tan x$，于是 $\mathrm{d}u = \sec^2 x \,\mathrm{d}x$。当 $x = 0$ 时 $u = 0$，当 $x = \frac{1}{4}\pi$ 时 $u = 1$。因此

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^n x \, \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^n \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

这里用了 $n > 0$，所以 $0^{n+1} = 0$。

? **想一想** 在第二个积分中，$\sec^n x \tan x$ 里面藏着哪个函数的导数?

由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$，我们先分出一个 $\sec x$ 因子：

$$\sec^n x \tan x = \sec^{n-1} x \,(\sec x \tan x).$$

现在代换 $u = \sec x$，于是 $\mathrm{d}u = \sec x \tan x \,\mathrm{d}x$，而 $x = 0$ 时 $u = 1$，$x = \frac{1}{4}\pi$ 时 $u = \sqrt{2}$。

由于 $n > 0$，我们可以除以 n，得

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^n x \tan x \,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} u^{n-1} \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^n}{n}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{n},$$

即所求。

第 (ii) 部分

第一个积分。记之为 I_1。我们用分部积分法，对 x 求导，并对 $\sec^4 x \tan x$ 积分。用第 (i) 部分的代换 $u = \sec x$，可得原函数（antiderivative）

$$\int \sec^4 x \tan x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} \sec^4 x + C.$$

（它在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上的定积分（definite integral）是 $\frac{1}{4}(4-1) = \frac{3}{4}$，即第 (i) 部分中 $n = 4$ 的情况。）所以

$$I_1 = \left[\tfrac{1}{4} x \sec^4 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x,$$

因为 $\sec^4 \frac{1}{4}\pi = (\sqrt{2})^4 = 4$。对余下的积分，写 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^2 x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^2 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

其中第一个积分是 $[\tan x]_0^{\frac{1}{4}\pi} = 1$，第二个是第 (i) 部分中 $n = 2$ 的情况。因此

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^4 x \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

第二个积分。记之为 I_2。同样地，我们对 x 的幂求导，并对 $\sec^2 x \tan x$ 积分。其中一个原函数是 $\frac{1}{2}\sec^2 x$，但 $\frac{1}{2}\tan^2 x$ 同样可用（两者相差常数 $\frac{1}{2}$），而且是更好的选择。

> ? **想一想** 为甚么 $\frac{1}{2}\tan^2 x$ 比 $\frac{1}{2}\sec^2 x$ 更好?

分部积分之后，我们会剩下 $x\tan^2 x$，而 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ 可以拆成我们会积分的几部分。此外，$\tan^2 x$ 在 0 处为零，令边界项保持简洁。（用 $\frac{1}{2}\sec^2 x$ 最终也会得到相同答案。）

所以，由 $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$，

$$I_2 = \left[\tfrac{1}{2} x^2 \tan^2 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x.$$

现在

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{32}.$$

再用一次分部积分法，以 $\tan x$ 作为 $\sec^2 x$ 的原函数，并利用 $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \ln \sec x$（由于在此区间上 $\sec x > 0$，此式成立）：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^2 x \,\mathrm{d}x &= \Big[x \tan x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} - \Big[\ln \sec x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

把各部分合起来，

$$I_2 = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}\right),$$

即

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x^2 \sec^2 x \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

验算

- 第 (i) 部分取 $n = 1$：两条公式分别给出 $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ 和 $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$，可以直接由 $\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]$ 和 $[\sec x]$ 验证。
- 正负与大小：第 (ii) 部分的两个被积函数在 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 上都是正数，答案 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521$ 和 $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.1780$ 亦然。第二个较小，理应如此，因为在该区间上 $x^2 \sec^2 x \le x \sec^4 x$（因为 $x < 1 < \sec^2 x$）。
- 粗略上界：$x \sec^4 x \tan x \le \frac{\pi}{4} \sec^4 x \tan x$，所以 $I_1 \le \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{4} \approx 0.589$。我们得到的 0.452 与此相符。用计算机以辛普森法则（Simpson's rule）分几个小区间计算，结果与两个值都很接近。

常见错误

- 在第 (i) 部分的第二个积分中，未先分出 $\sec x \tan x$ 就代换 $u = \sec x$，结果幂次留在 n 而非 $n - 1$。
- 忘记 $\sec \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$，因此 $\sec^4 \frac{1}{4}\pi = 4$ 而 $\sec^2 \frac{1}{4}\pi = 2$。
- 漏掉边界项（boundary term）$\left[\frac{1}{2}x^2 \tan^2 x\right]$，或把 $\int \tan x \,\mathrm{d}x$ 的正负号弄错（它是 $\ln \sec x = -\ln \cos x$）。

STEP 之外

第 (i) 部分的积分是积分 $\sec^m x \tan^n x$ 这套标准理论的起步，其中递推公式（reduction formulae）让你逐步降低幂次。像第 (ii) 部分那样带多项式因子的分部积分，可推广为

“表格法”（tabular method），而在更后的阶段，更发展成把导数从一个函数转移到另一个函数的想法，这正是微分方程弱解（weak solutions）的基础。若想仔细了解代换法和分部积分法为何成立，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；若想做更多同类型的题目，可试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。