详细解答

STEP I 2013，第 3 题

纯数学 · 向量代数

> **STEP I 2013，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q3

关键思路

这里的一切都是线性（linear）的，所以每次最干净利落的做法，都是把每一点写成 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 的组合，然后相减。两点相异，当且仅当它们的位置向量（position vector）之差不为零；而这个差总会化成一个简单的因子乘以像 $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 这样的向量。从几何上看，$X*Y$ 是直线 XY 上的一点，而当 $0<\lambda<1$ 时，它位于两点之间的线段（segment）上。

解答

在整个解答中，两点相同当且仅当它们的位置向量相等。

第 (i) 部分

按定义，$Y*X$ 的位置向量是 $\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}$，所以

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})-(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}) &= (2\lambda-1)\mathbf{x}-(2\lambda-1)\mathbf{y}\\ &= (2\lambda-1)(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}$$

由于 X 与 Y 相异，$\mathbf{x}-\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$，因此这个差为零当且仅当 $2\lambda-1=0$。故此，除非 $\lambda=\frac{1}{2}$（此时两者都是 XY 的中点），否则 $X*Y$ 与 $Y*X$ 相异。

第 (ii) 部分

把两边分别展开：

$$\begin{aligned}(X*Y)*Z:&\quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})+(1-\lambda)\mathbf{z}=\lambda^2\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z},\\ X*(Y*Z):&\quad \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z})=\lambda\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)^2\mathbf{z}.\end{aligned}$$

两者的 $\mathbf{y}$ 项相同，相减得

$$\begin{aligned}\text{差} &= (\lambda^2-\lambda)\mathbf{x} + ((1-\lambda)-(1-\lambda)^2)\mathbf{z}\\ &= -\lambda(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda(1-\lambda)\mathbf{z}\\ &= \lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x}).\end{aligned}$$

这个差不为零，当且仅当每个因子都不为零。所以 $(X*Y)*Z$ 与 $X*(Y*Z)$ 相异，当且仅当

$$\lambda \neq 0, \qquad \lambda \neq 1 \qquad \text{且} \qquad Z \neq X.$$

留意 Y 完全不起作用。被排除的值也合情合理：当 $\lambda = 1$ 时，这个运算总是给出第一点；当 $\lambda = 0$ 时，总是给出第二点，所以两种加括号方式分别都给出 X 或 Z。

第 (iii) 部分

为求简洁，记 $\mu = 1-\lambda$。右方为

$$\begin{aligned}(X*Z)*(Y*Z): \quad &\lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z}) + \mu(\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z})\\ &= \lambda^2\mathbf{x} + \lambda\mu\,\mathbf{y} + \mu(\lambda+\mu)\mathbf{z}\\ &= \lambda^2\mathbf{x} + \lambda\mu\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z},\end{aligned}$$

因为 $\lambda+\mu = 1$。这正是第 (ii) 部分中 $(X*Y)*Z$ 的展开式，所以对所有点 X、Y、Z，

$$(X*Y)*Z = (X*Z)*(Y*Z)$$

得证。

> **想一想** $X*(Y*Z)$ 的“对应结果”应该是怎样的?

在第 (iii) 部分中，外层的 $*Z$ 分配到左边的括号上。其镜像就是把 $X*$ 分配到右边的括号上，这提示我们试试 $(X*Y)*(X*Z)$。果然，

$$\begin{aligned}(X*Y)*(X*Z): \quad &\lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) + \mu(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z})\\ &= \lambda(\lambda+\mu)\mathbf{x} + \lambda\mu\,\mathbf{y} + \mu^2\mathbf{z}\\ &= \lambda\mathbf{x} + \lambda\mu\,\mathbf{y} + \mu^2\mathbf{z},\end{aligned}$$

这正是第 (ii) 部分中 $X*(Y*Z)$ 的展开式。所以对任意点 X、Y、Z，

$$X*(Y*Z) = (X*Y)*(X*Z).$$

第 (iv) 部分

我们断言 P_n 的位置向量为

$$\mathbf{p}_n = \lambda^n\mathbf{x} + (1-\lambda^n)\mathbf{y}.$$

当 $n = 1$ 时，这就是 $X * Y$ 的定义。若它对 $n-1$ 成立，则

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_n = \lambda\mathbf{p}_{n-1} + (1-\lambda)\mathbf{y} &= \lambda^n\mathbf{x} + (\lambda - \lambda^n + 1 - \lambda)\mathbf{y} \\ &= \lambda^n\mathbf{x} + (1-\lambda^n)\mathbf{y},\end{aligned}$$

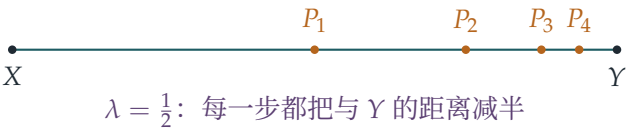
所以由归纳法（induction），此公式对所有 $n \geq 1$ 成立。

现在沿线段量度：

$$\mathbf{p}_n - \mathbf{x} = (1-\lambda^n)(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y} - \mathbf{p}_n = \lambda^n(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

两者都是同一个非零向量 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ 的正倍数，因为 $0 < \lambda < 1$ 给出 $0 < \lambda^n < 1$。所以 P_n 严格位于 X 与 Y 之间，而且

$$XP_n : P_nY = (1-\lambda^n) : \lambda^n.$$



每一步都把余下与 Y 的距离乘以 λ，所以这些点一步步向 Y 推进，并且当 $n \to \infty$ 时 $P_n \to Y$。

验算

- 在第 (i) 部分，沿一条直线取 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$、$\mathbf{y} = \mathbf{1}$ 及 $\lambda = \frac{1}{3}$：$X * Y$ 位于 $\frac{2}{3}$，$Y * X$ 位于 $\frac{1}{3}$，两者相差 $\frac{1}{3} = |2\lambda - 1|$。
- 在第 (ii) 部分，当 $Z = X$ 时，无论 λ 取何值，两种加括号方式都应相同；此时我们的差 $\lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x})$ 确实为零，正如所料。
- 在第 (iv) 部分，取 $\lambda = \frac{1}{2}$ 及 $n = 3$，比为 $\frac{7}{8} : \frac{1}{8} = 7 : 1$，而 P_3 确实位于由 X 到 Y 的 $\frac{7}{8}$ 处（距离减半三次）。取 $n = 1$ 时，比 $(1-\lambda) : \lambda$ 正是 $X * Y$ 的定义。

常见错误

- 在第 (ii) 部分忘记 $Z \neq X$：答案不只是关于 λ 的条件。
- 在第 (iv) 部分把比的次序弄反。由于 $\mathbf{p}_n$ 在 $\mathbf{x}$ 上的权重是 λ^n，当 λ^n 较大时它靠近 X，所以较短的一段 XP_n 对应的是 $1-\lambda^n$。

STEP 之外

点 $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}$ 是一个凸组合(convex combination,或称仿射组合(affine combination)),它是凸集（convex set)、重心坐标（barycentric coordinates）以及电脑图像中线性插值（linear interpolation）的基本构件。第 (ii) 部分说明 $*$ 不满足结合律（associative），而第 (iii) 部分则说明它满足自分配律（self-distributive)；具有这种性质的运算在代数中以架（rack)、环结（quandle）和中介代数（medial algebra）等名称来研究。若想从线性代数的角度理解，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》)。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。