详细解答

STEP I 2013，第 2 题

纯数学 · 下取整函数方程

STEP I 2013，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s1-q2

关键思路

函数 $\lfloor x \rfloor$ 在每个区间（interval）$[k, k+1)$ 上都是常数，所以在该区间上 $f(x) = k/x$ 只是一段直角双曲线（rectangular hyperbola）。整个图像就是由这些曲线段串连而成，每个整数 k 对应一段。于是解 $f(x) = c$ 便归结为：哪些曲线段能达到高度 c？在对应 k 的那一段上，唯一的候选是 $x = k/c$，而它恰好在落入 $[k, k+1)$ 时才算数。

解答

第 (i) 部分

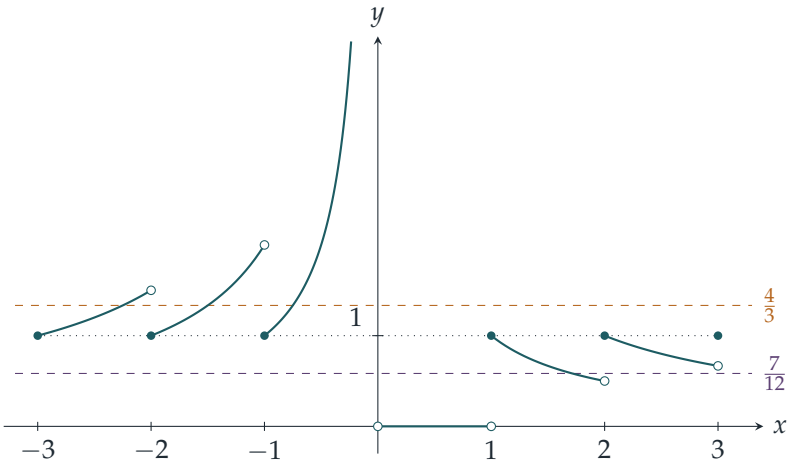
固定一个整数 k，考虑 $k \le x < k+1$（且 $x \neq 0$），此时 $f(x) = k/x$。

- $k = 0$，即 $0 < x < 1$：此时 $f(x) = 0$。
- $k \ge 1$：$f(x) = k/x$ 由 $f(k) = 1$ 递减（decreasing），趋向 $k/(k+1)$，但永远达不到。所以这一段的取值恰好是 $\left(\frac{k}{k+1}, 1\right]$。
- $k \le -1$：设 $k = -m$，其中 $m \ge 1$。此时 x 和 k 都是负数，所以 $f(x) = m/|x| > 0$。当 x 由 $-m$ 增加至趋向 $-m+1$ 时，$|x|$ 递减，所以 f 由 $f(-m) = 1$ 起递增。当 $m \ge 2$ 时，它趋向 $\frac{m}{m-1}$，但永远达不到，所以这一段的取值恰好是 $\left[1, \frac{m}{m-1}\right)$。当 $m = 1$ 时，当 $x \to 0^-$ 时 $f(x) = -1/x \to +\infty$，所以这一段的取值是 $[1, \infty)$。

在 $-3 \le x \le 3$ 范围内，各段如下：

x	$[-3,-2)$	$[-2,-1)$	$[-1,0)$	$(0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$
$f(x)$	$-3/x$	$-2/x$	$-1/x$	0	$1/x$	$2/x$
取值	$[1, \frac{3}{2})$	$[1,2)$	$[1,\infty)$	0	$(\frac{1}{2}, 1]$	$(\frac{2}{3}, 1]$

最后还有 $f(3)=1$。每一段都在其左端（整数端）从高度 1 开始，该点包含在内，而右端则是开端。



第 (ii) 部分

在 $\lfloor x\rfloor = k$ 的那一段上，方程 $f(x)=c$（其中 $c\neq 0$）即 $k/x=c$，所以 $x=k/c$。它恰好在 $k\le k/c<k+1$ 时才是真正的根（root）。因此对每个 c，我们只需利用第 (i) 部分得出的取值范围，判断哪些曲线段能达到高度 c。

$f(x)=\frac{7}{12}$。由于 $0<\frac{7}{12}<1$，只有 $k\ge 1$ 的曲线段可能有根，而且需要 $\frac{k}{k+1}<\frac{7}{12}$，即 $12k<7k+7$，即 $k<\frac{7}{5}$。所以只有 $k=1$ 可行，得 $x=1\big/\frac{7}{12}$：

$$x=\tfrac{12}{7}.$$

从图像上看，直线 $y=\frac{7}{12}$ 只与 $[1,2)$ 上的那一段相交，因为 $[2,3)$ 上的那一段一直高于 $\frac{2}{3}$。

$f(x)=\frac{17}{24}$。现在需要 $\frac{k}{k+1}<\frac{17}{24}$，即 $24k<17k+17$，即 $k<\frac{17}{7}$，所以 $k=1$ 或 $k=2$。根为 $x=k\big/\frac{17}{24}$：

$$x=\tfrac{24}{17}\quad\text{及}\quad x=\tfrac{48}{17}.$$

（确实 $2\le\frac{48}{17}\approx 2.82<3$。）

$f(x)=\frac{4}{3}$。由于 $\frac{4}{3}>1$，只有负数那边的曲线段可能有根。当 $\frac{4}{3}<\frac{m}{m-1}$（或 $m=1$）时，$k=-m$ 的那一段能达到 $\frac{4}{3}$，即 $4m-4<3m$，即 $m<4$。所以 $m=1,2,3$，根为 $x=-m\big/\frac{4}{3}=-\frac{3m}{4}$：

$$x=-\tfrac{3}{4},\quad x=-\tfrac{3}{2},\quad x=-\tfrac{9}{4}.$$

$m=4$ 的情况刚好不行：$[-4,-3)$ 上的那一段只取小于 $\frac{4}{3}$ 的值。

第 (iii) 部分

这里 $0 < \frac{9}{10} < 1$，所以根来自 $k \geq 1$ 且 $\frac{k}{k+1} < \frac{9}{10}$ 的曲线段，即 $10k < 9k + 9$，即 $k < 9$。所以 $k = 1, 2, \ldots, 8$ 各给出一个根 $x = \frac{10k}{9}$。最大的根对应 $k = 8$:

$$x = \frac{80}{9} \approx 8.89,$$

它确实落在 $[8, 9)$ 内。

最后部分

首先找出没有根或有无限多个根的 c 值。

- $c < 0$: 没有根，因为当 $x > 0$ 时 $f(x) \geq 0$，而当 $x < 0$ 时 $f(x) > 0$。
- $c = 0$: 每个 $x \in (0, 1)$ 都是根，所以有无限多个根。
- $c = 1$: 每个非零整数都是根，所以同样有无限多个根。

> **想一想** 对于一般的 c，不画图的话，怎样数根的个数?

利用第 (i) 部分得出的取值范围: 每一段最多贡献一个根，所以只需数一数有多少段的取值范围包含 c。

情况 $0 < c < 1$。 能达到 c 的曲线段是 $k \geq 1$ 且 $\frac{k}{k+1} < c$ 的那些。由于 $\frac{k}{k+1}$ 随 k 递增，这些段就是 $k = 1, 2, \ldots$，直至最后一个满足 $\frac{k}{k+1} < c$ 的 k。所以恰好有 n 个根，当且仅当第 n 段能达到 c 而第 $(n+1)$ 段不能:

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2}.$$

(当 $0 < c \leq \frac{1}{2}$ 时，没有任何一段能达到 c，因此没有根。)

情况 $c > 1$。 能达到 c 的曲线段是 $k = -m$ 的那些，其中 $m = 1$ 或 $\frac{m}{m-1} > c$。由于 $\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1}$ 随 m 增加而递减，这些段就是 $m = 1, 2, \ldots$，直至最后一个满足 $\frac{m}{m-1} > c$ 的 m。所以恰好有 n 个根，当且仅当 $m = n$ 的那一段能达到 c 而 $m = n + 1$ 的那一段不能:

$$\frac{n+1}{n} \leq c < \frac{n}{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

而当 $n = 1$ 时, 条件就是 $c \geq 2$ ($[-1, 0)$ 上的那一段必定能达到 c, 而当 $c \geq 2$ 时, $[-2, -1)$ 上的那一段不能)。

答案。 对 $n \geq 1$，方程 $f(x) = c$ 恰好有 n 个根，当且仅当

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{或} \qquad \frac{n+1}{n} \leq c < \frac{n}{n-1},$$

其中当 $n = 1$ 时，第二个条件理解为 $c \geq 2$。留意等号放在哪里。两个等号都源自曲线段的开端：$c = \frac{n+1}{n+2}$ 不能由 $[n+1, n+2)$ 上的那一段达到，而 $c = \frac{n+1}{n}$ 不能由 $[-(n+1), -n)$ 上的那一段达到。所以这两个边界值仍然恰好给出 n 个根。

验算

- 代回原式：$\lfloor \frac{12}{7} \rfloor = 1$ 且 $1/\frac{12}{7} = \frac{7}{12}$；$\lfloor \frac{48}{17} \rfloor = 2$ 且 $2/\frac{48}{17} = \frac{17}{24}$；$\lfloor -\frac{9}{4} \rfloor = -3$ 且 $-3/(-\frac{9}{4}) = \frac{4}{3}$；$\lfloor \frac{80}{9} \rfloor = 8$ 且 $8/\frac{80}{9} = \frac{9}{10}$。
- 一般答案与个别情况吻合：$\frac{2}{3} < \frac{17}{24} \leq \frac{3}{4}$ 给出 $n = 2$；$\frac{4}{3} \leq \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ 给出 $n = 3$；$\frac{8}{9} < \frac{9}{10} \leq \frac{9}{10}$ 给出 $n = 8$。后两个刚好落在范围的端点上，正好检验 $\leq$ 和 $<$ 的位置是否正确。
- 一个边界值：$c = 2$ 应该给出一个根。确实 $x = -\frac{1}{2}$ 可行，而 $x = -1$（来自 $k = -2$）有 $\lfloor -1 \rfloor = -1 \neq -2$。
- 试试 $c = \frac{1}{2}$：条件不给出任何 n；而确实对 $k \neq 0$，$x = k/c = 2k$ 永远不满足 $\lfloor 2k \rfloor = k$。

常见错误

- 忘记对负数 x 而言，$\lfloor x \rfloor$ 是向下取整，所以 $\lfloor -2.25 \rfloor = -3$，而不是 -2。这样会完全漏掉 $c > 1$ 时的负数分支。
- 端点搞错：每一段包含其左端（整数端，高度为 1），但不包含右端。这决定了最终条件中出现的是 $\leq$ 还是 $<$。
- 漏掉 $c = 0$ 和 $c = 1$（有无限多个根），或漏掉 $c < 0$ 和 $0 < c \leq \frac{1}{2}$（没有根）。

STEP 之外

像 $\lfloor x \rfloor / x$ 这样的函数，是“分段连续（continuous）但在孤立点上跳跃”的函数中最简单的例子。小心分辨哪些端点能够取到，正是大学第一个数学分析（analysis）课程处理上确界（supremum）和下确界（infimum）时所需的习惯。在这里，f 在 $x > 0$ 上的 $\sup f$ 是 1，而且能取到；而在 $x \geq 1$ 上的下确界是 $\frac{1}{2}$，却取不到。同一个函数还说明了当 $x \to \infty$ 时 $\lfloor x \rfloor / x \to 1$，让你初尝解析数论（analytic number theory）中所用的估计方法。若想进一步了解上确界、极限（limit）和连续性，Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是很好的读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。