详细解答

STEP I 2013，第 11 题

力学 · 摩擦力与平衡

STEP I 2013，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s1-q11

关键思路

两条绳在相对的两侧分别与水平成 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 和 α 的角，因此两绳互相垂直（perpendicular）。两个互相垂直的力 $T\cos\beta$ 和 $T\sin\beta$ 合成一个大小为 T 的单一力，方向由第一个力转过 β。把两条绳换成一个与水平成 $\alpha+\beta$ 角、大小为 T 的拉力之后，两部分都变成简短的练习：第 (i) 部分是极限摩擦（limiting friction），第 (ii) 部分则要察觉物块会被整个提离表面。

解答

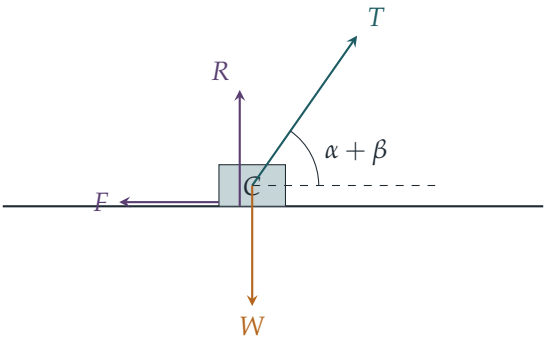
我们把 C 视为质点（particle），并把绳视为轻绳。取 x 轴为水平并指向 B，y 轴为竖直向上。

张力的合力

绳 BC 指向正 x 轴上方 α 角的方向，所以其单位向量（unit vector）为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$。绳 AC 与负 x 轴成 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 角，所以它与正 x 轴成 $\pi - (\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ 角，单位向量为 $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$。两者互相垂直。因此两绳的总拉力为

$$\begin{aligned} T\cos\beta\,(\cos\alpha, \sin\alpha) + T\sin\beta\,(-\sin\alpha, \cos\alpha) &= T(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ &\qquad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= T(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

所以两绳的作用恰好等同一个大小为 T、在水平之上成 $\alpha+\beta$ 角、拉向 B 一侧的单一力。由于 $0 < \alpha + \beta < \frac{1}{2}\pi$，两个分量都是正数。



第 (i) 部分

设 R 为法向反作用力（normal reaction），F 为摩擦力；若物块静止，摩擦力沿水平方向背离 B。平衡时，

$$\begin{aligned} &\text{竖直方向：} \quad R + T\sin(\alpha+\beta) = W, \qquad \text{所以} R = W - T\sin(\alpha+\beta), \\ &\text{水平方向：} \quad F = T\cos(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

条件 $W > T\sin(\alpha+\beta)$ 使 $R > 0$，所以物块确实被压在表面上，可以产生摩擦。只要所需的摩擦力不超过其极限值，即 $F \le \mu R$，物块便保持静止：

$$T\cos(\alpha+\beta) \le \mu(W - T\sin(\alpha+\beta)).$$

现在代入 $\mu = \tan\lambda = \sin\lambda/\cos\lambda$，并在两边乘以 $\cos\lambda$；由于 λ 是锐角，这个数是正数：

$$T\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda \le W\sin\lambda - T\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda.$$

移项并利用 $\cos(P-Q) = \cos P\cos Q + \sin P\sin Q$，得

$$W\sin\lambda \ge T(\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda + \sin(\alpha+\beta)\sin\lambda) = T\cos(\alpha+\beta-\lambda),$$

这正是所求的条件。（每一步都可逆，所以事实上物块保持静止当且仅当此式成立。）

? **想一想** 为甚么我们需要条件 $W > T\sin(\alpha+\beta)$ 呢?

若没有这个条件，竖直方向的方程会给出 $R \le 0$。表面只能推、不能拉，所以 R 为负是不可能的：物块会被提离表面（或仅仅刚好接触），也就没有摩擦力把它固定。这正是第 (ii) 部分的情况。

第 (ii) 部分

现在 $W = T\tan\phi$ 而 $\alpha+\beta = 2\phi$，所以 $0 < \phi < \frac{1}{4}\pi$。比较重量与两绳向上的拉力：

$$\begin{aligned} T\sin(\alpha+\beta) - W &= T(2\sin\phi\cos\phi - \tan\phi) \\ &= T\tan\phi\,(2\cos^2\phi - 1) \\ &= T\tan\phi\cos 2\phi > 0, \end{aligned}$$

因为 $0 < \phi < \frac{1}{4}\pi$ 使 $\tan\phi$ 和 $\cos 2\phi$ 都是正数。所以两绳向上的拉力大于重力向下的拉力。若物块留在表面上，我们便需要 $R = W - T\sin(\alpha+\beta) < 0$，这是不可能的。因此物块立即离开表面：$R = 0$，而既然没有接触，也就没有摩擦力。

此时仅有的力是与水平成 2ϕ 角的拉力 T 和重量。合力（resultant force）为

$$(T\cos 2\phi,\ T\sin 2\phi - T\tan\phi) = (T\cos 2\phi,\ T\tan\phi\cos 2\phi) = \frac{T\cos 2\phi}{\cos\phi}(\cos\phi,\ \sin\phi),$$

其中竖直分量用了上面的计算。其大小 $T\cos 2\phi/\cos\phi$ 是正数，所以不为零。物块由静止开始，所以其初始加速度，从而它开始运动的方向，都沿着合力的方向。该方向为 $(\cos\phi, \sin\phi)$，即在水平之上成 ϕ 角（指向 B），正如所求。

验算

- 取 $T = 10\,\mathrm{N}$、$\alpha = 20°$、$\beta = 40°$，于是 $\phi = 30°$，$W = 10\tan 30° \approx 5.77\,\mathrm{N}$。向上的拉力为 $10\sin 60° \approx 8.66\,\mathrm{N} > W$，合力为 $(10\cos 60°,\ 8.66 - 5.77) = (5,\ 2.89)$，其角度为 $\arctan(2.89/5) = 30° = \phi$。
- 在第 (i) 部分中，$\lambda = \frac{1}{2}\pi$（无限粗糙）给出 $W \geq T\sin(\alpha+\beta)$，这本来已经成立，所以物块永不滑动；$\lambda \to 0$（光滑）给出 $0 \geq T\cos(\alpha+\beta)$，这不成立，所以光滑表面无法使物块静止。两者都符合我们的预期。
- 第 (i) 部分的条件亦已用电脑，就 α, β, T, W, μ 的大量随机取值，与直接检验 $F \leq \mu R$ 的结果互相核对。

常见错误

- 把每条绳分别分解，结果在代数中迷失，而没有察觉两绳互相垂直、应先把它们合成。
- 在第 (ii) 部分写出 $R = W - T\sin(\alpha+\beta)$ 后继续处理摩擦力，却没有察觉 R 会是负数。
- 忘记说明由静止开始的质点最初沿合力方向运动。

STEP 之外

λ 即摩擦角（angle of friction），其意思是法向反作用力与极限摩擦力合成一个与法线成 λ 角的总反作用力；平衡可能出现，恰恰在总反作用力能落在这个“摩擦锥”（cone of friction）之内的时候。第 (i) 部分正是这个命题的变装版本，而同一幅图像亦能处理三维中的摩擦以及刚体问题。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对摩擦、约束和接触力有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。