详细解答

STEP I 2013，第 10 题

力学 · 恢复系数与摩擦力

STEP I 2013，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s1-q10

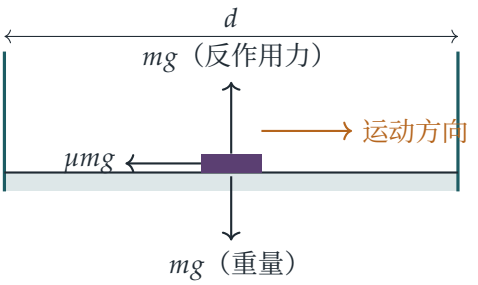
关键思路

在两次碰撞之间，唯一的水平力是摩擦力（friction），所以冰球的减速度（deceleration）恒为 μg，而等加速度公式 $v^2 = u^2 + 2as$ 把冰球离开一道挡板时的速率与到达下一道挡板时的速率联系起来；然后牛顿（Newton）碰撞定律（law of restitution）把到达时的速率乘以 r。结果得到 v_i^2 的一条线性递推关系（linear recurrence）。要解线性递推关系 $w_{i+1} = aw_i + b$，只需平移到它的不动点（fixed point），之后它就只是一个等比数列（geometric sequence）。

解答

递推关系

把冰球视为一个质点，沿垂直于挡板的直线运动。在两次碰撞之间冰球在冰面上滑行时，法向反作用力（normal reaction）为 mg（没有铅垂方向的加速度）；由于冰球正在滑动，摩擦力取其极限值（limiting value）μmg，方向与运动方向相反。



由牛顿第二定律，减速度为常数 μg。因此，对于一趟长度为 d、起始速率为 v_i（即第 i 次碰撞刚结束时的速率）的横越（traverse），冰球到达另一道挡板时的速率 u 满足

$$u^2 = v_i^2 - 2\mu g d.$$

挡板是固定的，所以牛顿碰撞定律指出冰球离开时的速率是其接近速率的 r 倍：$v_{i+1} = ru$。两边平方，

$$v_{i+1}^2 = r^2u^2 = r^2v_i^2 - 2r^2\mu g d, \qquad \text{所以} \qquad v_{i+1}^2 - r^2v_i^2 = -2r^2\mu g d,$$

这正是所求的结果。若把起始速率记作 $v_0 = v$，同样的论证也适用于第一趟横越，所以这条递推关系对所有 $i \geq 0$ 都成立。

横越的次数

两边除以 $2\mu g d$，并令 $w_i = \dfrac{v_i^2}{2\mu g d}$，于是 $w_0 = k$ 及

$$w_{i+1} = r^2(w_i - 1).$$

“经过 n 趟横越后在挡板旁静止”的意思是：冰球在第 n 趟横越结束时以零速率到达挡板。这时它离开的速率也是零，所以 $v_n = 0$，即 $w_n = 0$（而对于 $i < n$，$w_i > 0$）。

想一想 怎样解 $w_{i+1} = r^2(w_i - 1)$?

先找常数解 $w_i = c$：需要 $c = r^2(c-1)$，所以 $c = -\dfrac{r^2}{1-r^2}$；由于 $r \neq 1$，这是有意义的。把递推关系减去 $c = r^2(c-1)$，得

$$w_{i+1} - c = r^2(w_i - c),$$

所以 $w_i - c$ 是公比为 r^2 的等比数列：

$$w_i = c + r^{2i}(k - c).$$

令 $w_n = 0$，得 $r^{2n}(k-c) = -c$，即

$$r^{2n}\left(k + \frac{r^2}{1-r^2}\right) = \frac{r^2}{1-r^2} \quad \Longrightarrow \quad r^{2n-2}(k(1-r^2) + r^2) = 1.$$

两边乘以 r^{-2n}，整理成

$$r^{-2n} = 1 + k(r^{-2} - 1), \qquad \text{所以} \qquad \boxed{n = \frac{\ln\left(1 + k(r^{-2}-1)\right)}{2\ln(1/r)}}$$

（当 $0 < r < 1$ 时，$\ln(1/r) > 0$；又因为 $k > 0$ 且 $r^{-2} > 1$，对数的自变量大于 1，所以 $n > 0$，理应如此。）

$r = \mathrm{e}^{-1}$ 的情况

此时 $r^{-2} = \mathrm{e}^2$ 而 $\ln(1/r) = 1$，所以公式变成

$$n = \tfrac{1}{2}\ln\left(1 + k(\mathrm{e}^2 - 1)\right),$$

这正是所求的结果。

$r = 1$ 的情况

递推关系变成 $w_{i+1} = w_i - 1$：由于在挡板处没有损失，每趟横越恰好消耗 v^2 中的 $2\mu g d$。所以 $w_i = k - i$，而由 $w_n = 0$ 得

$$n = k = \frac{v^2}{2\mu g d}.$$

这其实就是能量守恒的考虑：初始动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 在总距离 nd 上全部被摩擦力耗散，所以 $\frac{1}{2}mv^2 = \mu mg\, nd$。

验算

- 取 $r = \mathrm{e}^{-1}$，从 $w_3 = 0$ 把递推关系倒过来推：$w_2 = 1$，$w_1 = \mathrm{e}^2 + 1$，$w_0 = \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1 \approx 62.99$。公式给出 $\frac{1}{2}\ln\left(1 + (\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1)(\mathrm{e}^2 - 1)\right) = \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^6 = 3$，理应如此。
- 当 $r \to 1$ 时，$r^{-2} - 1 \approx 2(1 - r)$ 且 $\ln(1/r) \approx 1 - r$，所以一般公式趋向 $\dfrac{2k(1-r)}{2(1-r)} = k$，与 $r = 1$ 时的答案吻合。
- k 是无量纲的（v^2 和 gd 都是速率的平方），而 n 也必须是无量纲的。
- 对随机选取的 μ、d、r 和 v 以数值方法逐步模拟运动，结果以很高的精确度证实了这条递推关系。

常见错误

- 对 v_i^2 应用碰撞定律时用了因子 r 而不是 r^2：碰撞定律讲的是速率，所以速率的平方要乘以 r^2，摩擦力那一项也一样。
- 忘记 n 数的是横越的趟数，而不是反弹速率非零的碰撞次数：条件是 $v_n = 0$，而 $v_0 = v$。

STEP 之外

递推关系 $w_{i+1} = aw_i + b$ 是最简单的线性差分方程（linear difference equation），而减去不动点这个技巧，正是你将来在线性微分方程中会遇到的“余函数加特解”（complementary

function plus particular solution）方法。这类弹跳问题（经典例子是皮球在地面上弹跳）也是能量耗散的好例子；在没有摩擦力的情况下，它们还展示了在有限时间内发生无限多次事件的现象。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对碰撞和摩擦力有更深入的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。