详细解答

STEP I 2013，第 1 题

纯数学 · 含平方根的方程

STEP I 2013，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s1-q1

关键思路

每条方程其实都是一条经过伪装的二次方程（quadratic equation）。把平方根（square root）记作 y，再把其余一切以 y 表示，就得到一条关于 y 的普通二次方程。唯一要留意的是平方根永不为负，所以 $y \geq 0$：每一次都正是这个条件把增根（spurious root）剔除。

解答

第 (i) 部分

设 $y = \sqrt{x}$，$y \geq 0$，则 $x = y^2$，方程变为

$$y^2 + 3y - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 + 6y - 1 = 0.$$

由二次公式（quadratic formula），

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

取负号会得到负值,而平方根不可能是负数。由于 $\sqrt{11} > 3$,取正号得 $y = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - 3) > 0$，所以这是唯一的可能。于是

$$x = y^2 = \frac{11 - 6\sqrt{11} + 9}{4} = \frac{10 - 3\sqrt{11}}{2}.$$

一旦知道 $y \geq 0$，每一步都是可逆的（reversible），所以这确实是（唯一的）实根。

第 (ii)(a) 部分

这里开平方的是 $x+2$，所以设 $y=\sqrt{x+2}$，$y\geq 0$，得 $x=y^2-2$。方程变为

$$y^2-2+10y-22=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y^2+10y-24=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (y+12)(y-2)=0.$$

由于 $y\geq 0$，我们舍弃 $y=-12$，故 $y=2$，而 $x=2^2-2=2$。

验证：$2+10\sqrt{4}-22=0$。唯一的实根是 $x=2$。

> **想一想** 如果保留了 $y=-12$，会发生甚么事?

这会得到 $x=144-2=142$，而 $142+10\sqrt{144}-22=240\neq 0$。$y=-12$ 是相关方程 $x-10\sqrt{x+2}-22=0$ 的根；如果你粗心地把式子平方，你所解的其实就是这条方程。条件 $y\geq 0$ 正是把两者区分开来的关键。

第 (ii)(b) 部分

这次题目没有提示代换（substitution），所以我们要自己找一个。根号内的式子是

$$2x^2-8x-3=2(x^2-4x)-3,$$

而 x^2-4x 亦出现在根号外。这就是两者之间的联系。

> **想一想** 这里 y 应该取甚么：x^2-4x，还是整个平方根?

取 y 为平方根，方程就会变成一条不含根号的二次方程。设 $y=\sqrt{2x^2-8x-3}$，其中 $y\geq 0$。则 $y^2=2(x^2-4x)-3$，所以

$$x^2-4x=\frac{y^2+3}{2}.$$

代入方程，得

$$\begin{aligned}\frac{y^2+3}{2}+y-9=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad y^2+2y-15=0\\ &\Longleftrightarrow\quad (y+5)(y-3)=0.\end{aligned}$$

由于 $y\geq 0$，必须 $y=3$。于是

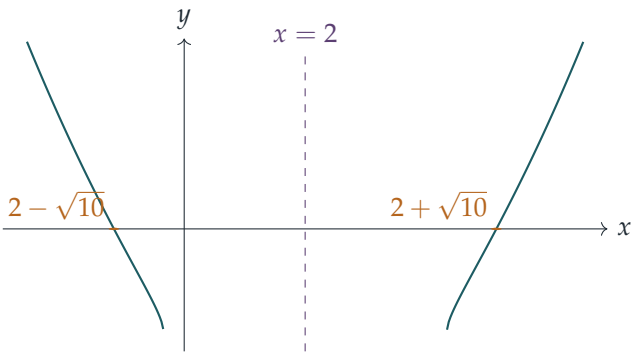
$$2x^2-8x-3=9 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=2\pm\sqrt{10}.$$

这两个值都使 $2x^2-8x-3$ 等于 9，是正数，所以平方根有定义且等于 3。因此两者都是真正的根：实根为

$$x=2+\sqrt{10} \quad 及 \quad x=2-\sqrt{10}.$$

这两个根关于 $x = 2$ 对称（symmetric），这是理所当然的，因为方程只通过 $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ 依赖于 x。

左方的图像显示了这一点。它只在 $2x^2 - 8x - 3 \geq 0$ 时有定义，即 $x \leq 2 - \sqrt{5.5}$ 或 $x \geq 2 + \sqrt{5.5}$，而且在每一支上各穿过零一次。



验算

- 第 (i) 部分：$x = \frac{1}{2}(10 - 3\sqrt{11}) \approx 0.02506$，所以 $\sqrt{x} \approx 0.1583$，而 $x + 3\sqrt{x} \approx 0.02506 + 0.47494 = 0.5$。
- 第 (ii)(b) 部分：$x = 2 + \sqrt{10} \approx 5.1623$ 给出 $x^2 - 4x = 6$ 及 $2x^2 - 8x - 3 = 9$，所以左方为 $6 + 3 - 9 = 0$。被舍弃的值 $y = -5$ 需要 $x^2 - 4x = 14$，此时左方为 $14 + 5 - 9 = 10 \neq 0$。
- 在每个左方式子的整个定义域（domain）上作数值扫描，所找到的根恰好是上述各根，别无其他。

常见错误

- 保留了关于 y 的二次方程的负根。平方根永不为负，所以那个根不会给出解。
- 在 (ii)(b) 一开始就把两边平方。这会得到一条四次方程（quartic equation），难度大得多，而且会引入额外的根，之后还得逐一检验。
- 在 (ii)(a) 忘记了 $x = y^2 - 2$，而不是 y^2。

STEP 之外

引入新变量，把一条困难的方程化为熟悉的方程，是数学中最有用的习惯之一。在 (ii)(b) 中，方程只依赖于 $x^2 - 4x$，所以它是 $(x-2)^2$ 的函数。看出这类对称性（symmetry），并处理在该对称下保持不变的量，这种做法在伽罗瓦（Galois）理论（Galois theory）中会再次出现：在那里，人们通过找出根的、在对称变换下保持不变的表达式来解多项式方程（polynomial equation）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）是进入这些概念的一条平易途径。若想做更多这类题目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）非常出色（而且免费）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。