详细解答

STEP III 2012，第 9 题

力学 • 转动滑轮的动力学

STEP III 2012，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

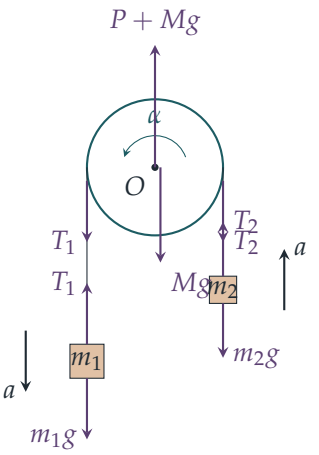
step.maths.org/questions/12-s3-q9

关键思路

测得的轴上作用力就是线索。滑轮的质心（centre of mass）不会移动，所以轴必须承托滑轮的重量，同时平衡两段绳的张力（tension）。由此 P 就是两个张力之和，从而可以求出两个质点的加速度。知道加速度之后，滑轮的转动方程就能给出转动惯量（moment of inertia）。摩擦力偶（friction couple）只会改变这一条方程，其他一概不变。

解答

模型。两个质点视为质点，绳是轻（light）而不可伸长（inextensible）的。绳在滑轮上不打滑，所以绳的速率等于圆盘边缘的速率。我们假设系统由静止释放，因此较重的质点 m_1 下降。设 a 为 m_1 向下的加速度，这也是 m_2 向上的加速度。于是滑轮的角加速度（angular acceleration）为 $\alpha = a/r$。m_1 一侧绳的张力为 T_1，m_2 一侧为 T_2（两者不同，因为滑轮有惯性）。设 I 为滑轮绕轴的转动惯量。



对每个质点应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m_1g - T_1 = m_1a, \qquad T_2 - m_2g = m_2a,$$

所以

$$T_1 = m_1(g - a), \qquad T_2 = m_2(g + a).$$

轴上的作用力。滑轮的质心位于固定点 O，所以滑轮所受的合力为零。作用在滑轮上的力有：它的重量 Mg、两个张力（两者都向下拉，因为两侧的绳都是竖直悬垂的），以及轴施加的力。摩擦力偶（我们在第 (ii) 部分才加入）没有合力（resultant），所以不会在这里出现。因此轴上的竖直作用力为 $Mg + T_1 + T_2$，与测量值比较，得

$$P = T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a,$$

所以

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g - P}{m_1 - m_2}. \tag{1}$$

这只用到测量值和两个质点的方程，所以在两部分中都成立。

第 (i) 部分

轴上没有摩擦时，只有张力对 O 有力矩（moment）。对轴取力矩，

$$(T_1 - T_2)r = I\alpha = \frac{Ia}{r}, \qquad \text{所以} \qquad I = \frac{(T_1 - T_2)r^2}{a}.$$

而 $T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$，所以

$$I = r^2\left(\frac{(m_1 - m_2)g}{a} - (m_1 + m_2)\right).$$

把 (1) 代入 a:

$$\begin{aligned} I &= r^2\left(\frac{(m_1-m_2)^2g}{(m_1+m_2)g-P}-(m_1+m_2)\right)\\ &= r^2\,\frac{(m_1-m_2)^2g-(m_1+m_2)^2g+(m_1+m_2)P}{(m_1+m_2)g-P}\\ &= \frac{((m_1+m_2)P-4m_1m_2g)r^2}{(m_1+m_2)g-P}, \end{aligned}$$

其中用到 $(m_1+m_2)^2-(m_1-m_2)^2=4m_1m_2$。这就是 $(*)$，证毕。

第 (ii) 部分

把新的计算值记为 I'。摩擦力偶 C 阻碍转动，而转动方向是由 T_1 驱动的方向，所以力矩方程变成

$$(T_1-T_2)r-C=\frac{I'a}{r}.$$

加速度仍然由 (1) 给出，因为所用的是同一个测量值 P，而关于轴上作用力的论证并不涉及 C。所以 T_1-T_2 和 a 与第 (i) 部分完全相同，于是

$$I'=\frac{(T_1-T_2)r^2}{a}-\frac{Cr}{a}=(*)-\frac{Cr}{a}.$$

想一想 我们怎样知道 a 的正负?

系统由静止开始，滑轮转动时 m_1 向下移动，所以 m_1 必定有正的向下加速度。(如果 a 为零或负数，m_1 根本不会开始向下移动。) 所以 $a>0$。由于 $C>0$ 且 $r>0$，得 $Cr/a>0$，因此**考虑摩擦后算出的值比 $(*)$ 小**。这是合理的：张力产生的净扭矩 (torque) 有一部分用来克服摩擦，所以只需较小的惯性就能解释同一个观测到的加速度。

C 的上界。把张力代入力矩方程:

$$((m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a)r-C=\frac{I'a}{r},$$

整理后得

$$(m_1-m_2)rg-C=a\left(\frac{I'}{r}+(m_1+m_2)r\right).$$

右边 $a>0$、$I'\geq 0$ (转动惯量不可能是负数) 而且 $(m_1+m_2)r>0$，所以右边严格为正。因此

$$C<(m_1-m_2)rg,$$

证毕。换句话说，摩擦力偶必须小于两边重量不平衡所产生的力偶 $(m_1-m_2)gr$。否则系统根本不会开始移动。

验算

- 轻滑轮：若 $I = 0$ 且 $C = 0$，则 $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$（熟悉的阿特伍德机（Atwood machine）结果），而 $P = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$。此时 $(*)$ 的分子为零，正如预期。
- 静止的滑轮：当 $a \to 0$ 时，$P \to (m_1 + m_2)g$，$(*)$ 的分母趋于零，$(*)$ 趋于无限大。无限重的滑轮不会产生加速度。
- 数值验算：取 $g = 9.8$、$m_1 = 3$、$m_2 = 1$、$r = 0.5$、$I = 0.7$ 及 $C = 2$（国际单位制），真实运动中 $a \approx 2.29\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，$P \approx 34.6\,\mathrm{N}$。公式 $(*)$ 给出 $I \approx 1.14$，恰好多了 $Cr/a \approx 0.44$，而考虑摩擦的模型则还原出 0.7。这里 $C = 2 < (m_1 - m_2)rg = 9.8$。我们用同样方法测试了 10^4 个随机例子。

常见错误

- 以为两侧的张力相同。这只对轻滑轮或无摩擦滑轮成立，而在这里会令 I 从问题中消失。
- 计算轴上作用力时忘记滑轮本身的重量。这正是测量值写成 $P + Mg$ 的原因。
- 以为摩擦力偶会改变轴上的作用力。力偶的合力为零，所以两部分中都有 $P = T_1 + T_2$。

STEP 之外

这是从测量推断隐藏参数的一个小例子。答案取决于你所假设的模型，而忽略摩擦会令估计值朝一个可预测的方向偏差。在大学一年级的力学中，刚体会用线动量和角动量的完整理论来处理，而对于绕一般轴转动的物体，转动惯量会变成一个张量（tensor）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）深入讲解定轴转动，以及滑轮有质量的阿特伍德机。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。