详细解答

STEP III 2012，第 8 题

纯数学 · 斐波那契裂项级数

> **STEP III 2012，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q8

关键思路

第 (ii) 部分的式子每当 n 增加一，就会改变正负号，而第 (i) 部分正是在提示我们去寻找这种规律。一旦知道它在 n 为奇数时的值，第 (iii) 部分的反正切恒等式（identity）其实只是 $\tan(A-B)$ 公式换了个样子。把这条恒等式重新整理，就能把级数（series）的每一项写成两个反正切的*差*，于是求和便可以伸缩相消（telescope）。

解答

首几项为

$$F_0, F_1, \ldots, F_8 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21.$$

第 (i) 部分

利用这些数值，

$$F_0F_3 - F_1F_2 = 0\cdot 2 - 1\cdot 1 = -1, \qquad F_2F_5 - F_3F_4 = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = -1,$$

所以两个式子相等，正如所求。

第 (ii) 部分

设 $G_n = F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2}$。第 (i) 部分说明 $G_0 = G_2$，这启发我们比较 G_{n+1} 与 G_n。把递推关系（recurrence）写成 $F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2}$ 的形式，得

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= F_{n+1}F_{n+4} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}F_n \\ &= -G_n, \end{aligned}$$

其中第四行再次用了递推关系 $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$。

所以 G_n 每一步都改变正负号。由于第 (i) 部分给出 $G_0 = -1$，可得（对 n 用归纳法（induction））$G_n = (-1)^{n+1}$。两种情况为

$$F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = \begin{cases} -1 & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \\ 1 & \text{若 } n \text{ 为奇数。} \end{cases}$$

例如，$n = 1$ 给出 $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$，而 $n = 4$ 给出 $3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$。

第 (iii) 部分

固定 $r \geq 1$，并设

$$\alpha = \arctan \frac{1}{F_{2r}}, \qquad \beta = \arctan \frac{1}{F_{2r+1}}.$$

所有 $k \geq 1$ 的 F_k 都是正整数，所以这两个量都有定义。由复角公式（compound-angle formula），

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{1}{F_{2r}} - \dfrac{1}{F_{2r+1}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2r}F_{2r+1}}} = \frac{F_{2r+1} - F_{2r}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1} = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1},$$

这里用了 $F_{2r+1} - F_{2r} = F_{2r-1}$。现在以奇数值 $n = 2r - 1$ 应用第 (ii) 部分：

$$F_{2r-1}F_{2r+2} - F_{2r}F_{2r+1} = 1, \qquad \text{所以} \qquad F_{2r}F_{2r+1} + 1 = F_{2r-1}F_{2r+2}.$$

由于 $F_{2r-1} \geq 1$，它不为零，可以约去：

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r-1}F_{2r+2}} = \frac{1}{F_{2r+2}}.$$

想一想 正切相等不一定代表角相等。为甚么我们可以断定 $\alpha - \beta = \arctan(1/F_{2r+2})$?

由于 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一一对应的（one-to-one），只需验证两个角都在这个区间内。这里 $0 < \beta \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$，因为 $1 \le F_{2r} \le F_{2r+1}$，所以 $0 \le \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$。另外，按定义 $\arctan(1/F_{2r+2})$ 位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内。因此

$$\arctan\frac{1}{F_{2r}} = \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2r+2}} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

这就是所求的恒等式。

求和。把恒等式重新整理，得

$$\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \arctan\frac{1}{F_{2r}} - \arctan\frac{1}{F_{2r+2}},$$

所以部分和（partial sums）伸缩相消：

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} &= \left(\arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_4}\right) + \left(\arctan\frac{1}{F_4} - \arctan\frac{1}{F_6}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\arctan\frac{1}{F_{2N}} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}}\right) \\ &= \arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}} = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}},\end{aligned}$$

因为 $F_2 = 1$。当 $n \ge 2$ 时，有 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ge F_n + 1$，所以 $F_n \to \infty$。于是 $1/F_{2N+2} \to 0$，而由于 arctan 连续（continuous）且 $\arctan 0 = 0$，令 $N \to \infty$ 便得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

验算

- $r = 1$：恒等式说 $\arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$。这是经典的 $\frac{\pi}{4}$ 恒等式，因为右方的 tan 为 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)/\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 1$。
- 首三项 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{13} \approx 0.4636 + 0.1974 + 0.0768 = 0.7378$，与 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{21} \approx 0.7378$ 吻合。
- 数值上，级数的 89 项给出 $0.785398163\ldots$，在机器精度内与 $\frac{\pi}{4}$ 一致。第 (ii) 部分的公式对每个 $n < 150$ 亦准确成立。

常见错误

- 在第 (iii) 部分用了第 (ii) 部分的偶数情况。那里的下标是 $2r-1$, $2r$, $2r+1$, $2r+2$，所以 $n = 2r-1$ 是奇数，值为 $+1$。
- 由正切相等直接推出角相等，而没有验证两个角都位于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内。
- 忘记伸缩求和后的首项：它是 $\arctan(1/F_2) = \frac{\pi}{4}$，而不是 $\arctan(1/F_1)$。

STEP 之外

第 (ii) 部分与卡西尼（Cassini）恒等式 $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ 是近亲。两者最好通过矩阵（matrix）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 来理解：它的 n 次幂的元素正是斐波那契数（Fibonacci numbers），所以取行列式（determinant）便立即得到卡西尼恒等式。伸缩级数（telescoping series），以及由部分和过渡到极限时所需的谨慎，是大学第一个分析（analysis）课程的必备内容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是阅读这些内容的好起点，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题》）则有更多关于递推关系的 STEP 风格练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。