详细解答

STEP III 2012，第 7 题

纯数学 · 耦合微分方程

STEP III 2012，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s3-q7

关键思路

两条耦合的一阶方程（coupled first-order equations），只要消去一个变量，就会变成一条二阶方程（second-order equation）：先对 $\dot{y}$ 的方程求导，再利用第一条方程本身，把 z 写成 y 和 $\dot{y}$ 的式子。之后，每一部分都只是选取常数 A 和 B 而已。在第 (iii) 部分，无穷和是两个几何级数（geometric series），把结果与第 (ii) 部分对比，就能确定 c。从物理角度看，z_2 是每隔一个单位时间注射同一剂量后所达到的稳态（steady state）。

解答

通解

对 $\dot{y} = -2y + 2z$ 求导，再以第二条方程代入 $\dot{z}$，得

$$\ddot{y} = -2\dot{y} + 2\dot{z} = -2\dot{y} + 2(-\dot{y} - 3z) = -4\dot{y} - 6z.$$

由第一条方程可把 z 用 y 表示：

$$z = y + \tfrac{1}{2}\dot{y}, \qquad \text{所以} \qquad 6z = 6y + 3\dot{y}.$$

代入后得

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 6y = 0.$$

辅助方程（auxiliary equation）$m^2 + 7m + 6 = (m+1)(m+6) = 0$ 的根为 $m = -1$ 和 $m = -6$，因此

$$y = Ae^{-t} + Be^{-6t}$$

其中 A 和 B 为任意常数。然后由 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ 得出 z：

$$z = Ae^{-t}(1 - \tfrac{1}{2}) + Be^{-6t}(1 - 3) = \tfrac{1}{2}Ae^{-t} - 2Be^{-6t},$$

此即所求。

> **想一想** 我们用了两条方程来得出 y 的方程，但求 z 时只用了第一条。我们找到的这一对函数，真的满足第二条方程吗？

确实满足。由 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$，有 $\dot{z} = \dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y} = \dot{y} + \frac{1}{2}(-7\dot{y} - 6y) = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$。另一方面，$-\dot{y} - 3z = -\dot{y} - 3y - \frac{3}{2}\dot{y} = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$，两者相同。所以方程组的每个解都具有这个形式，而每对具有这个形式的函数都是解。

第 (i) 部分

在 $t = 0$ 时，$y(0) = A + B$，$z(0) = \frac{1}{2}A - 2B$。由条件得

$$\tfrac{1}{2}A - 2B = 0, \qquad A + B = 5,$$

所以 $A = 4B$，于是 $5B = 5$。因此 $B = 1$，$A = 4$：

$$y = 4\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-6t}, \qquad z_1(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-6t}.$$

药物起初在血液中，脑内的药量由零开始上升，然后随着被吸收而衰减。

第 (ii) 部分

设 $a = \frac{1}{2}A$ 及 $b = 2B$，使 $z = a\mathrm{e}^{-t} - b\mathrm{e}^{-6t}$。条件为

$$a - b = c, \qquad a\mathrm{e}^{-1} - b\mathrm{e}^{-6} = c.$$

以第一式减第二式，得 $a(1 - \mathrm{e}^{-1}) = b(1 - \mathrm{e}^{-6})$。把这个共同的值记作 k，于是

$$a = \frac{k}{1 - \mathrm{e}^{-1}}, \qquad b = \frac{k}{1 - \mathrm{e}^{-6}}, \qquad \text{及} \qquad c = a - b = kC,$$

其中

$$C = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-1}} - \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-6}}.$$

由于 $\mathrm{e}^{-1} > \mathrm{e}^{-6}$，有 $1 - \mathrm{e}^{-1} < 1 - \mathrm{e}^{-6}$，所以 $C > 0$。特别地，$C \neq 0$，因此可以除以它：$k = c/C$。（等价地说，这两条线性方程的行列式（determinant）为 $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-6} \neq 0$，所以解是唯一的。）因此

$$z_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} - \frac{\mathrm{e}^{-6t}}{1 - \mathrm{e}^{-6}}\right),$$
$$y_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} + \frac{\mathrm{e}^{-6t}}{2(1 - \mathrm{e}^{-6})}\right),$$

其中 y_2 由 $A = 2a$ 及 $B = \frac{1}{2}b$ 得出。

第 (iii) 部分

设 $m = -n$，则 m 取遍 $0, 1, 2, \ldots$，且 $t - n = t + m$。利用第 (i) 部分，

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \sum_{m=0}^{\infty} (2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^m - 2\mathrm{e}^{-6t}(\mathrm{e}^{-6})^m).$$

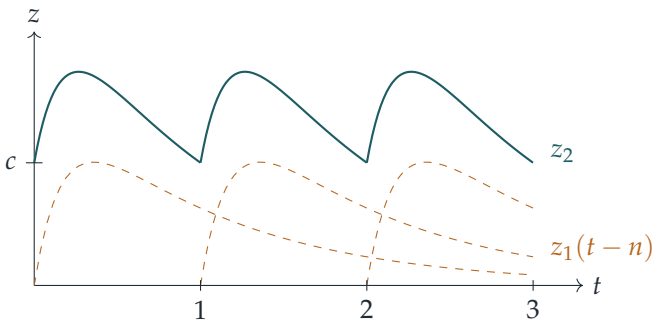
两部分都是几何级数，公比分别为 e^{-1} 和 e^{-6}，都严格介于 0 与 1 之间，所以两者各自收敛（converge），可以分开求和：

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2\mathrm{e}^{-6t}}{1-\mathrm{e}^{-6}}.$$

这正好是 $z_2(t)$ 中括号内的式子乘以 2。所以该恒等式在 $0 \leq t \leq 1$ 上成立，当且仅当 $c/C = 2$，即

$$c = 2C = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-6}} \approx 1.159.$$

（若 c 取其他值，两边相差同一个非零函数的非零倍数，所以这个值是唯一的。）



这幅图展示了其中的含义。在时间 n 向血液注射剂量 5，会产生脑内曲线 $z_1(t-n)$（虚线）。若从遥远的过去开始，每个整数时间都注射一剂，脑内的药量就是所有这些响应之和。这个和每隔一个单位时间重复一次（实线），而在 $[0,1]$ 上，它就是 c 取这个值时的 z_2。

验算

- 在第 (i) 部分，$z_1(0) = 2 - 2 = 0$，$y(0) = 4 + 1 = 5$。
- 在第 (iii) 部分，$z_2(0)$ 和 $z_2(1)$ 都应等于 c。在求和式中，$t = 1$ 的级数就是 $t = 0$ 的级数去掉首项，而该项为 $z_1(0) = 0$。这样不用任何代数运算就能确认 $z(0) = z(1)$。
- 当 $c = 2C$ 时，$y_2(0) - y_2(1) = 4 + 1 = 5$：每个周期内血液恰好损失一剂，而下一次注射正好补回。

- 数值上，$c \approx 1.15898$。在 $t = 0.37$ 处把 $z_1(t+m)$ 的 200 项相加，得 $1.967693\ldots$，与 $z_2(0.37)$ 吻合至小数点后 12 位。

常见错误

- 忘记 z 已经通过 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ 由 y 决定，反而另外解一条 z 的方程，并引入新的、独立的常数。
- 在第 (iii) 部分弄错平移的方向：$n \le 0$ 意味着 $t - n \ge t$，所以只有过去的剂量才有贡献。

STEP 之外

这是一个线性房室模型（linear compartment model），可写成 $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}$，其中 M 是一个 2×2 矩阵。衰减率 1 和 6 是 M 的特征值（eigenvalue）的相反数，这正是你会在大学一年级课程中遇到的、以矩阵指数（matrix exponential）看待线性系统的观点。第 (iii) 部分是叠加原理（superposition）的一个简单例子：对重复脉冲的响应，是同一个脉冲响应（impulse response）的多个平移副本之和。这个想法引向格林函数（Green's function）和卷积（convolution）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵盖了线性方程组和脉冲响应。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。