详细解答

STEP III 2012，第 6 题

纯数学 · 复数根的轨迹

> **STEP III 2012，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q6

关键思路

一个复数（complex number）为零，当且仅当其实部（real part）与虚部（imaginary part）同时为零。因此，关于 $z = x + \mathrm{i}y$ 的一条复数方程，会变成关于 x、y 和 p 的两条实数方程。虚部方程总能因式分解（factorise）出因子 y，于是每个轨迹（locus）都分成“实根”和“非实根”两部分。在每种情况下，我们先消去（eliminate）p，得到 (x, y) 平面上的一条曲线，然后检验该曲线上哪些点确实来自某个实数 p。

解答

第一条方程 $z^2 + pz + 1 = 0$

设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 为实数。则

$$z^2 + pz + 1 = (x^2 - y^2 + px + 1) + \mathrm{i}\,(2xy + py).$$

由于 p 是实数，两个括号分别是实部和虚部，两者都必须为零：

$$x^2 - y^2 + px + 1 = 0, \qquad (2x + p)y = 0,$$

此即所求。

由第二条方程，得 $p = -2x$ 或 $y = 0$。若 $y = 0$，第一条方程变为 $x^2 + px + 1 = 0$。此时 $x \neq 0$，因为 $x = 0$ 会得出 $1 = 0$，所以可以除以 x，得 $p = -(x^2 + 1)/x$。因此，要么 $p = -2x$，要么 $p = -(x^2 + 1)/x$ 且 $x \neq 0$（而在第二种情况下 $y = 0$）。

根的轨迹。情况 $p = -2x$。代入实部方程，得 $x^2 - y^2 - 2x^2 + 1 = 0$，即

$$x^2 + y^2 = 1.$$

反过来（converse），在单位圆（unit circle）上任取一点 $x+\mathrm{i}y$，并设 $p=-2x$，这是实数。则 $(2x+p)y=0$，且 $x^2-y^2+px+1=1-x^2-y^2=0$，所以该点是一个根。因此整个单位圆都在轨迹之内。

情况 $y=0$，$p=-(x^2+1)/x$。对每个实数 $x\neq 0$，这个 p 都是实数，而且 x 是 $x^2+px+1=0$ 的根。点 $x=0$ 永远不是根，因为 $0^2+p\cdot 0+1=1$。

所以根的轨迹是去掉原点的实轴，连同单位圆 $|z|=1$。（点 ± 1 同时位于两者之上。）

第二条方程 $pz^2+z+1=0$

设 $z=x+\mathrm{i}y$，由实部和虚部得

$$p(x^2-y^2)+x+1=0,\qquad (2px+1)y=0.$$

原点永远不是根，因为 $z=0$ 会得出 $1=0$。

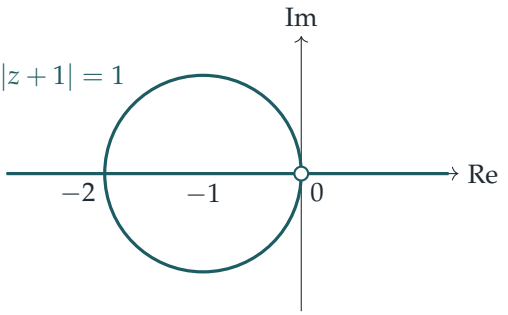
情况 $y=0$。此时 $px^2+x+1=0$ 且 $x\neq 0$，所以 $p=-(x+1)/x^2$。对每个实数 $x\neq 0$，这都是实数，所以实轴上除原点外的每一点都在轨迹之内。（当 $x=-1$ 时得 $p=0$，方程变成一次方程 $z+1=0$，其根的确是 -1。）

情况 $2px+1=0$。此时 $x\neq 0$ 且 $p=-1/(2x)$。代入实部方程并乘以 $-2x$：

$$(x^2-y^2)-2x^2-2x=0 \iff x^2+y^2+2x=0 \iff (x+1)^2+y^2=1.$$

反过来，对这个圆上除原点以外的任何一点，都有 $x\neq 0$，所以 $p=-1/(2x)$ 是实数，而把步骤倒推回去，便可证明两条方程都成立。

所以根的轨迹是实轴连同圆 $|z+1|=1$（圆心 -1，半径 1），但要去掉同时位于两者之上的原点。



空心圆表示缺失的点 $z=0$。

想一想 为甚么这个轨迹看起来像是把第一个轨迹“里外翻转”了？

若 z 是 $pz^2+z+1=0$ 的根，则 $w=1/z$ 满足 $w^2+w+p=0$。映射 $z\mapsto 1/z$ 把实轴（不含 0）映到自身，又把直线 $\operatorname{Re} w=-\frac{1}{2}$（即 $w^2+w+p=0$ 的非实根所在之处）映到通过原点的圆 $|z+1|=1$。原点之所以缺失，是因为它对应于 $w=\infty$。

第三条方程 $pz^2+p^2z+2=0$

若 $p=0$，方程变为 $2=0$，没有根，所以下文始终有 $p\neq 0$。由实部和虚部得

$$p(x^2-y^2)+p^2x+2=0,\qquad p(2x+p)y=0,$$

由于 $p\neq 0$，第二条化为 $(2x+p)y=0$。

情况 $p=-2x$。由于 $p\neq 0$，故 $x\neq 0$。代入得

$$-2x(x^2-y^2)+4x^3+2=0\quad\Longleftrightarrow\quad x(x^2+y^2)=-1.$$

反过来，这条曲线上任何一点都有 $x\neq 0$，所以 $p=-2x$ 是非零实数，而把步骤倒推回去，便可证明该点是一个根。由于 $x^2+y^2>0$，曲线上 $x<0$。把它写成

$$y^2=-\frac{1}{x}-x^2,$$

我们需要 $-1/x\geq x^2$；乘以 $x<0$ 会令不等式（inequality）反向，得 $-1\leq x^3$，所以 $-1\leq x<0$。曲线通过 -1（该处 $y=0$），关于实轴对称，而且当 $x\to 0^-$ 时 $y^2\to\infty$，所以虚轴是一条渐近线（asymptote）。此外，对 $x<0$ 有 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x=x^{-2}-2x>0$，所以当 x 由 -1 增至 0 时，$|y|$ 一直递增。以极坐标形式（polar form）表示，曲线为 $r^3\cos\theta=-1$。

情况 $y=0$。此时，实数 x 在轨迹之内，当且仅当存在实数 p 使 $xp^2+x^2p+2=0$。当 $x=0$ 时，这就是 $2=0$，所以 0 不在轨迹之内。当 $x\neq 0$ 时，这是关于 p 的二次方程，它有实数解当且仅当其判别式（discriminant）非负：

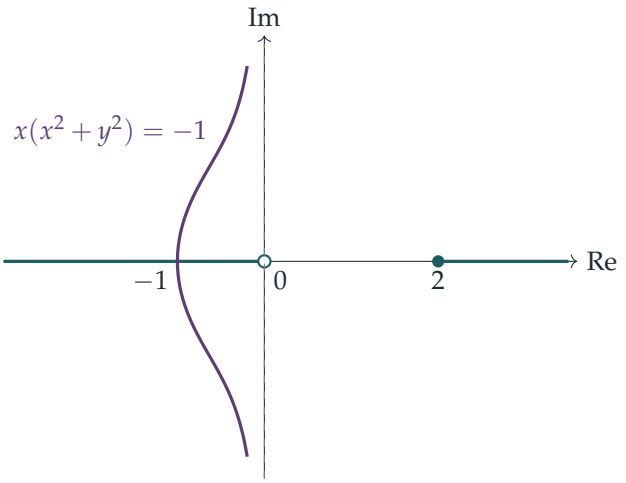
$$x^4-8x=x(x^3-8)\geq 0.$$

当 $x<0$（两个因子皆为负）或 $x\geq 2$（两个因子皆非负）时成立，而当 $0<x<2$ 时不成立。以这种方法求得的任何实数 p 必然非零，因为 $p=0$ 会得出 $2=0$。例如 $x=2$ 需要 $2p^2+4p+2=0$，故 $p=-1$，而确实有 $-z^2+z+2=-(z-2)(z+1)$。

想一想 为甚么这里要解出 p，而不是解出 x?

我们想知道哪些点 x 可以达到，所以 x 是已知的，而 p 才是未知数。这条方程是关于 p 的二次方程，而存在实根恰好就是关于 x 的判别式条件。

所以根的轨迹是负实轴、实轴上的射线 $x\geq 2$，以及曲线 $x(x^2+y^2)=-1$；这条曲线从 -1 出发，向上下两个方向伸展，趋近虚轴。



曲线只在 -1 处与实轴相交，该处的切线是铅垂的；当 $|y|\to\infty$ 时，曲线趋近虚轴。

验算

- 对于 $z^2+pz+1=0$，两根之积为 1，所以非实根是一对共轭（conjugate）复数 $z,\bar{z}$，且 $|z|^2=1$：再次得到单位圆。
- 在第三条方程中，$p=-1$ 给出根 2 和 -1，分别是射线的端点和曲线的顶点。取 $p=1$ 得 $z^2+z+2=0$，其根为 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$，而 $x(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$，正如所料。
- 在数值上，我们以 10^5 个随机 p 值求解全部三条方程，确认每个根都位于所述的轨迹上。我们亦确认了各轨迹上的随机点都能以所述的 p 达到；而对 p 作精细扫描后，并未发现第三条方程在 $(0,2)$ 内有任何实根，最小的正实根是 2.0。

常见错误

- 忘记检验反方向：消去 p 只得到一条包含轨迹的曲线，你仍须证明每一点都能由某个实数 p 达到。在第三条方程中，$(0,2)$ 内的实数点虽然满足 $y=0$，却永远不能达到。
- 除以 x 或 p 时没有说明它为何非零。缺失的原点正是由此而来。
- 草率处理 $p=0$：在第二条方程中它给出真正的根 -1，但在第三条方程中它完全没有根。

STEP 之外

根轨迹（root locus）是控制工程（control engineering）中的标准工具：当增益（gain）参数改变时，系统的极点（poles）沿着曲线移动，而系统的稳定性（stability）取决于这些极点会否越过进入右半平面（right half-plane）。这道题亦暗示了映射 $z \mapsto 1/z$ 的几何性质：它把直线和圆映成直线和圆。这正是莫比乌斯变换（Möbius transformations）理论的开端，Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）对此有精彩的图解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。