详细解答

STEP III 2012，第 5 题

纯数学 · 圆锥曲线上的有理点

> **STEP III 2012，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q5

关键思路

(i)(b) 中的恒等式（identity）其实是一个经过伪装的旋转（rotation）：点 $(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta,\ \sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)$ 正是把点 $(1, -\sqrt{m})$ 旋转角度 θ 后所得的点，因此它仍然位于半径为 $\sqrt{1+m}$ 的圆上。若 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都是有理数（例如 (i)(a) 中得到的 $\frac{3}{5}$ 和 $\frac{4}{5}$），这个旋转就会把一个“好”点变成另一个“好”点。第 (ii) 部分的所有内容都是同一个技巧，只是从一个合适的整数点出发；至于双曲线（hyperbola），我们则把旋转换成它的双曲版本。

解答

第 (i) 部分

(a) 点 $(1,0)$ 是 $x^2+y^2=1$ 上的一个整数有理点（integer rational point）。要找非整数的有理点，我们利用 3,4,5 三角形：$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$，所以 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 符合要求，而且两个坐标都不是整数。

(b) 点 $(1,1)$ 是 $x^2+y^2=2$ 上的一个整数有理点。

展开后，交叉项（cross terms）为 $+2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$ 和 $-2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$，两者互相抵消，所以

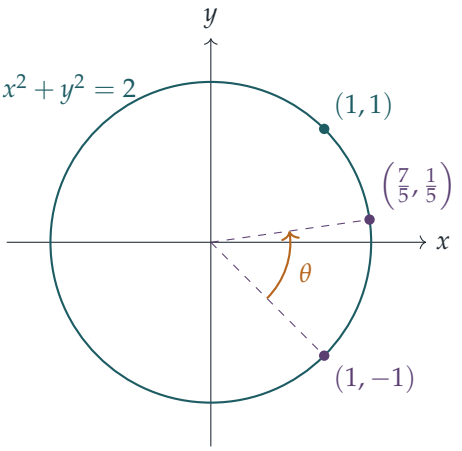
$$\begin{aligned}(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta)^2 + (\sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)^2 &= \cos^2\theta + m\sin^2\theta + \sin^2\theta + m\cos^2\theta \\ &= (1+m)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1+m.\end{aligned}$$

取 $m=1$，使右方等于 2，并选取 θ 使 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$（这是可行的，因为 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

位于单位圆（unit circle）上）。于是

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{7}{5}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5}$$

满足 $x^2 + y^2 = 2$；事实上 $\frac{49+1}{25} = 2$。所以 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 是 $x^2 + y^2 = 2$ 上的一个非整数有理点。



上图显示了个中过程：把 $(1, -1)$ 沿逆时针方向旋转 θ（其中 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$），便落在 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 上。

第 (ii) 部分

(a) 由于 $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$，点 $(1, \sqrt{2})$，即 $p = 1$、$q = 0$、$r = 0$、$s = 1$，是 $x^2 + y^2 = 3$ 上的一个整数 2-有理点。

要找非整数的点，就用 (i)(b) 的恒等式，取 $m = 2$ 使 $1 + m = 3$，并再次取 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$：

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

这里 $p = \frac{3}{5}$、$q = \frac{4}{5}$、$r = \frac{4}{5}$、$s = -\frac{3}{5}$，全都不是整数，而由恒等式可知 $x^2 + y^2 = 3$。直接验证：$x^2 = \frac{9+32+24\sqrt{2}}{25}$，$y^2 = \frac{16+18-24\sqrt{2}}{25}$，两者相加得 $\frac{75}{25} = 3$。

> ? **想一想** 恒等式只给出 $1 + m$，而 m 又必须与 $\sqrt{2}$ 有关，那么我们怎样才能得到 11?

把起点放大。恒等式源自旋转 $(1, -\sqrt{m})$；我们同样可以旋转任何点 $(a, -b\sqrt{2})$。交叉项同样会抵消，得到

$$(a\cos\theta + b\sqrt{2}\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\sqrt{2}\cos\theta)^2 = (a^2 + 2b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + 2b^2.$$

所以我们需要满足 $a^2+2b^2=11$ 的整数，而 $a=3$、$b=1$ 正好可行（$9+2=11$）。换句话说，我们从 $x^2+y^2=11$ 上的整数 2-有理点 $(3,\sqrt{2})$ 出发。

(b) 取 $a=3$、$b=1$、$\cos\theta=\frac{3}{5}$、$\sin\theta=\frac{4}{5}$：

$$x=\tfrac{9}{5}+\tfrac{4}{5}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{12}{5}-\tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

所以 $p=\frac{9}{5}$、$q=\frac{4}{5}$、$r=\frac{12}{5}$、$s=-\frac{3}{5}$，全都不是整数，且 $x^2+y^2=11$。直接验证：$x^2=\frac{81+32+72\sqrt{2}}{25}$，$y^2=\frac{144+18-72\sqrt{2}}{25}$，两者相加得 $\frac{275}{25}=11$。

(c) 对于双曲线，我们需要一个保持 x^2-y^2 而非 x^2+y^2 不变的“旋转”。若 $c^2-s^2=1$（可以想像 $c=\cosh t$、$s=\sinh t$），则

$$\begin{aligned}(ac+b\sqrt{2}\,s)^2-(as+b\sqrt{2}\,c)^2&=a^2c^2+2b^2s^2-a^2s^2-2b^2c^2\\&=(a^2-2b^2)(c^2-s^2)=a^2-2b^2,\end{aligned}$$

因为交叉项 $2\sqrt{2}\,abcs$ 再次互相抵消。我们需要 $a^2-2b^2=7$：取 $a=3$、$b=1$（所以 $(3,\sqrt{2})$ 是双曲线上的一个整数 2-有理点）。

接着我们需要有理数 c、s 使 $c^2-s^2=(c-s)(c+s)=1$。选取 $c+s=2$ 及 $c-s=\frac{1}{2}$，得 $c=\frac{5}{4}$、$s=\frac{3}{4}$。于是

$$x=\tfrac{15}{4}+\tfrac{3}{4}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{9}{4}+\tfrac{5}{4}\sqrt{2},$$

其中 $p=\frac{15}{4}$、$q=\frac{3}{4}$、$r=\frac{9}{4}$、$s=\frac{5}{4}$，全都不是整数。直接验证：$x^2=\frac{225+18+90\sqrt{2}}{16}$，$y^2=\frac{81+50+90\sqrt{2}}{16}$，所以 $x^2-y^2=\frac{112}{16}=7$。这就是 $x^2-y^2=7$ 上的一个非整数 2-有理点。

验算

每一个点都可以像上文那样用分数准确验证，也可以用数值验证：对于 (ii)(c)，$x\approx 4.81066$、$y\approx 4.01777$，得 $x^2-y^2\approx 7.0000$；对于 (ii)(b)，$x\approx 2.93137$、$y\approx 1.55147$，得 $x^2+y^2\approx 11.0000$。最后务必逐一检查 p,q,r,s，确认没有一个是整数。

常见错误

- 忘记 0 是整数：像 $\left(\frac{7}{5}\sqrt{2},\ldots\right)$ 这样的点有 $p=0$，所以它不是非整数 2-有理点。
- 在 (c) 中，一个看似无害的选择也可能失败：$c=\frac{5}{3}$、$s=\frac{4}{3}$ 同样满足 $c^2-s^2=1$，但会得出 $x=5+\frac{4}{3}\sqrt{2}$，其中 $p=5$ 是整数。每个系数都要检查。

STEP 之外

形如 $p+q\sqrt{2}$ 的数构成一个域（field）$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，而这道题其实是在该域上寻找圆锥曲线（conic）上的点。把已知点旋转一个有理角度的技巧，是一套优美理论的起点：只要一条圆锥曲线上有一个有理点，经过该点的直线便能把其余所有有理点参数化（parametrise）；而 $x^2-2y^2=1$（佩尔方程（Pell's equation））上的有理点，在 (c) 所用的那种双曲“旋转”之下正好构成一个群（group）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）讲述了佩尔方程与平方和，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）则介绍了像 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 这样的域。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。