详细解答

STEP III 2012，第 4 题

纯数学 · 无穷级数求和

STEP III 2012，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s3-q4

关键思路

一切都建基于两个标准级数（series）：$\sum x^n/n! = \mathrm{e}^x$ 及 $\sum x^n/n = -\ln(1-x)$。在第 (i) 部分，窍门是把每个关于 n 的多项式（polynomial）改写成能与 $n!$ 相消的形式，即使用 $n(n-1)$ 和 $n(n-1)(n-2)$ 这类乘积，而不是 n 的幂。在第 (ii) 部分，部分分式（partial fractions）把那个棘手的有理因子拆成 $1/(n+k)$ 形式的若干项，而每一项都是一个平移了的对数级数。

解答

第 (i) 部分

两个事实便足以完成所有工作。第一，$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1.$$

第二，对任何整数 $k \geq 1$，当 $n < k$ 时，项 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n!$ 等于零；当 $n \geq k$ 时，它等于 $1/(n-k)!$。所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \mathrm{e} \qquad (k \geq 1). \tag{$*$}$$

这里所有级数都绝对收敛（absolutely converge）（每一个都是关于 n 的多项式除以 $n!$），因此我们可以随意把它们拆开再重新组合。

第一个和。 由于 $n+1=n+1$，利用 $(*)$ 并取 $k=1$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=2\mathrm{e}-1,$$

正如所求。

第二个和。 我们写成 $(n+1)^2=n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$。于是由 $(*)$ 取 $k=2$ 及 $k=1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\mathrm{e}+3\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=5\mathrm{e}-1,$$

正如所求。

第三个和。

? **想一想** 怎样把 $(2n-1)^3$ 化成下降乘积 $n(n-1)(n-2)$、$n(n-1)$、n?

展开得 $(2n-1)^3=8n^3-12n^2+6n-1$。接着我们利用

$$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n,\qquad n^2=n(n-1)+n.$$

你可以展开右边来验证，或者代入 $n=0,1,2,3$ 检查。代入后，

$$\begin{aligned}(2n-1)^3&=8[n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n]-12[n(n-1)+n]+6n-1\\&=8\,n(n-1)(n-2)+12\,n(n-1)+2n-1.\end{aligned}$$

（快速验证：当 $n=1$ 时两边都是 1，当 $n=2$ 时两边都是 27。）现在由 $(*)$ 取 $k=3,2,1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{n!}=8\mathrm{e}+12\mathrm{e}+2\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=21\mathrm{e}+1.$$

第 (ii) 部分

部分分式。 分子与分母的次数相同，所以先做除法：

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

设 $\dfrac{3n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n+1}+\dfrac{B}{n+2}$，利用遮盖法（cover-up rule）得 $A=\dfrac{-2}{1}=-2$（取 $n=-1$）及 $B=\dfrac{-5}{-1}=5$（取 $n=-2$）。因此

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}.$$

三个部分。 我们令 $x=\frac{1}{2}$，并利用对于 $|x|<1$ 成立的 $-\ln(1-x)=\sum_{m=1}^{\infty} x^m/m$。下面三个级数各自收敛（各项缩小的速度至少与 2^{-n} 一样快），所以把和拆开是合理的。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 2,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)}{x} = 2\ln 2,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)-x}{x^2} = 4(\ln 2-\tfrac{1}{2}) = 4\ln 2-2.$$

在第二行和第三行中，我们分别令 $m=n+1$ 及 $m=n+2$。第三行是完整的对数级数减去其 $m=1$ 项，即 x。

> ? **想一想** 为甚么第三部分需要额外的 $-x$?

平移 $m=n+2$ 令求和由 $m=2$ 开始，所以这个级数是缺了首项的 $-\ln(1-x)$。忘记这一点是这里最容易出错的地方。

合并。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)2^{-n}}{(n+1)(n+2)} = 2+2(2\ln 2)-5(4\ln 2-2) = 12-16\ln 2.$$

验算

- 计算至 $n=60$ 的部分和（partial sums），(i) 中三个和分别得 4.436564、12.591409 及 58.083918。它们在机器精度内与 $2e-1$、$5e-1$ 及 $21e+1$ 吻合。
- 在 (ii) 中，$12-16\ln 2\approx 0.909645$，与部分和一致。首几项是 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{5}{48}$、$\frac{1}{16}$，所以总和略小于 1 是合理的。
- (ii) 的答案必须是正数，而它的确是：$16\ln 2\approx 11.09<12$。

常见错误

- 使用 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = e$，忘记了缺少 $n=0$ 这一项。
- 把 $\sum n^2/n!$ 写成 $\sum n/(n-1)!$ 便停下来。你仍须拆开 $n=(n-1)+1$。
- 在 (ii) 中，为 $\sum x^n/(n+2)$ 平移指标时漏掉了 $-x$。

STEP 之外

下降乘积 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 称为下降阶乘（falling factorials），而用它们来表示多项式就要用到第二类斯特林数（Stirling numbers of the second kind）。$(*)$ 中的和表明，平均值为 1 的泊松分布（Poisson distribution）的第 k 阶阶乘矩（factorial moment）等于 1。正因如此，例如 $\sum n^k/n!$ 等于 e 乘以第 k 个贝尔数（Bell number）。这里的重新排列之所以合理，是基于绝对收敛，这是大学一年级分析（analysis）的一个重要主题：参见 Abbott，*Understanding Analysis*（《理解分析》）。至于概率方面，参见 Blitzstein 与 Hwang，*Introduction to Probability*（《概率导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。