详细解答

STEP III 2012，第 3 题

纯数学 · 相切曲线与四次方程

STEP III 2012，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s3-q3

关键思路

把 $y = 4 - x^2$ 代入第二条方程，得到一条关于 x 的四次方程（quartic），它的根就是两曲线交点的 x 坐标。“相切”即是有一个重根（repeated root）。与其把 m 和 k 当作未知数，不如用切点的 x 坐标 a 来标记一切：这样 m、k 以及其余所有交点，结果都是 a 的简单函数。由此可以准确知道四幅草图各自的样子，而第 (ii) 部分就是 $m = 12$ 的特殊情况。

解答

准备工作：两曲线可在哪里相切?

把两条曲线记作 $C_1\colon y = 4 - x^2$ 和 $C_2\colon mx = k - y^2$。C_1 是大家熟悉的开口向下的抛物线（parabola），经过 $(\pm 2, 0)$ 和 $(0, 4)$。C_2 即 $x = (k - y^2)/m$：这是一条关于 x 轴对称、开口向左（因为 $m > 0$）的抛物线，顶点（vertex）为 $(k/m, 0)$。当 $k > 0$ 时，它与 y 轴相交于 $(0, \pm\sqrt{k})$；当 $k < 0$ 时，它与 y 轴完全不相交。

C_1 上每一点都是 $(x, 4 - x^2)$，因此它在 C_2 上当且仅当

$$F(x) = x^4 - 8x^2 + mx + 16 - k = 0,$$

因为 $(4 - x^2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$。

? **想一想** 为甚么“相切”意味着 F 有重根?

在公共点上，C_1 的方向为 $(1, -2x)$，而 C_2（即 $mx + y^2$ 的等值曲线（level curve））的法向量（normal）为 $(m, 2y)$。当方向与法向量垂直时，两曲线相切：$m - 4xy = 0$，即 $m - 4x(4 - x^2) = 0$。而 $F'(x) = 4x^3 - 16x + m$ 正好就是这个式子。所以两曲线在 $x = a$

相切，当且仅当 $F(a) = F'(a) = 0$，即重根。

由 $F'(a) = 0$ 得 $m = 4a(4 - a^2)$。代入 $F(a) = 0$，

$$k = a^4 - 8a^2 + 4a^2(4 - a^2) + 16 = -3a^4 + 8a^2 + 16 = (4 - a^2)(3a^2 + 4),$$

因此

$$\frac{k}{m} = \frac{3a^2 + 4}{4a}.$$

由于 $m > 0$，我们需要 $0 < a < 2$ 或 $a < -2$。把二重因式除去，

$$F(x) = (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 8),$$

这可以展开验证：x^3 项互相抵消，x^2 的系数是 $3a^2 - 8 - 4a^2 + a^2 = -8$，$x$ 的系数是 $2a^3 - 2a(3a^2 - 8) = 4a(4 - a^2) = m$，常数项是 $a^2(3a^2 - 8) = 16 - k$。这个二次因式的判别式（discriminant）为 $8(4 - a^2)$，所以只有当 $0 < a < 2$ 时才有其他交点，它们位于

$$x_\pm = -a \pm \sqrt{8 - 2a^2}.$$

现在可以按 a 把四种情况分类：

- $k < 0$ 当且仅当 $a^2 > 4$，故 $a < -2$。
- 当 $0 < a < 2$ 时，$k - 16 = a^2(8 - 3a^2)$，故 $k > 16$ 当且仅当 $a < \sqrt{8/3}$。
- 当 $0 < a < 2$ 时，$\frac{k}{m} < 2$ 当且仅当 $3a^2 - 8a + 4 < 0$，即 $(3a - 2)(a - 2) < 0$，即 $a > \frac{2}{3}$。

所以 (a) 对应 $a < -2$，(c) 对应 $0 < a < \frac{2}{3}$，(d) 对应 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$，(b) 对应 $\sqrt{8/3} < a < 2$。（没有任何相切的情形同时满足 $0 < k < 16$ 和 $k/m > 2$，这就是题目没有列出这种情况的原因。）

第 (i) 部分

在每种情况下，C_1 与坐标轴的交点都是 $(\pm 2, 0)$ 和 $(0, 4)$；C_2 与坐标轴的交点是 $(k/m, 0)$，当 $k > 0$ 时还有 $(0, \pm\sqrt{k})$。

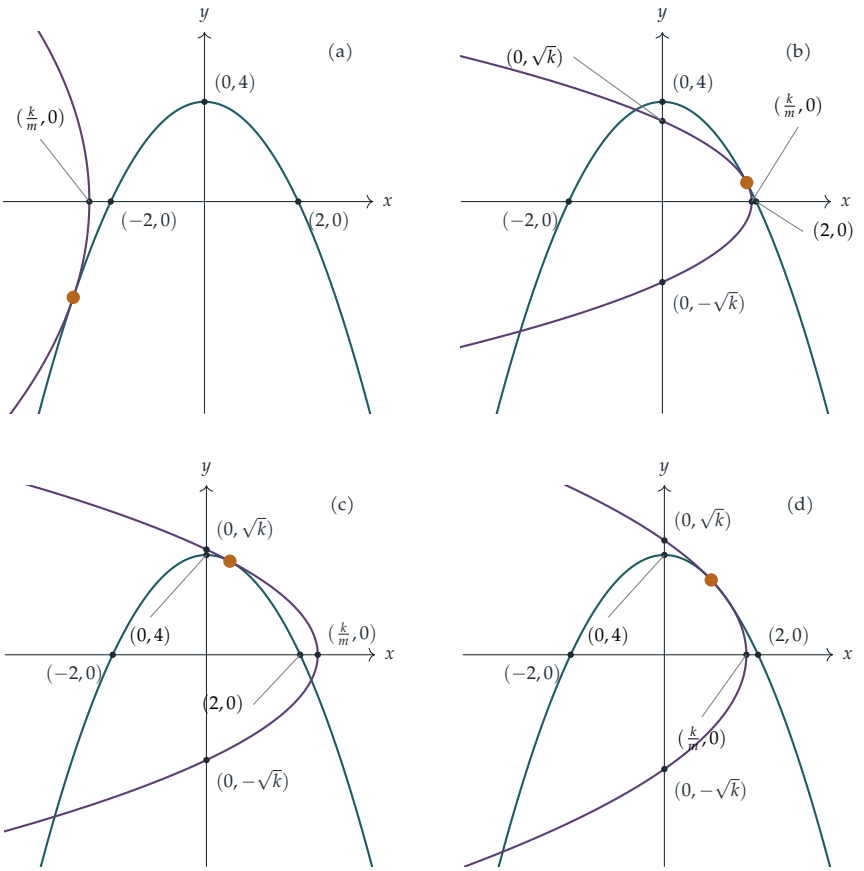
(a) 这里 $a < -2$，所以两曲线在第三象限（quadrant）的 $(a, 4 - a^2)$ 相切，而且在其他地方没有交点。顶点位于 $k/m = -(3a^2 + 4)/(4|a|)$，它小于 -2，因为 $(3|a| - 2)(|a| - 2) > 0$。所以 C_2 整条位于 $(-2, 0)$ 的左方，它的下半支贴靠在 C_1 的左支上。

(b) 现在 $\sqrt{8/3} < a < 2$，所以切点在第一象限，靠近 $(2, 0)$。顶点满足 $\sqrt{3} \le k/m < 2$（由算术–几何平均不等式（AM–GM），$3a^2 + 4 \ge 4\sqrt{3}\,a$），而且 $\sqrt{k} < 4$，所以 C_2 的顶点和两个 y 截距都位于 C_1 之下。上半支从下方与 C_1 相切，然后在 x_+ 与它相交，其中 $-2 < x_+ < 0$（第二象限中的一点）。下半支在 $x_- < -2$ 与 C_1 相交，位于第三象限。

(c) 这里 $0 < a < \frac{2}{3}$。顶点在 $(2,0)$ 的右方，而且 $\sqrt{k} > 4$，所以 C_2 绕过 C_1 的顶部，在第一象限从外侧与它相切。此外 $x_+ > 2$，因为 $\sqrt{8-2a^2} > 2+a \iff (3a-2)(a+2) < 0$，而 $x_- < -2$。所以下半支在第四象限与 C_1 相交，在第三象限再相交一次。

(d) 这里 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$。顶点在 0 与 2 之间，位于 C_1 之下，但 $\sqrt{k} > 4$，所以上半支从 $(0,4)$ 上方经过。它在第一象限与 C_1 相切，并且也在第一象限于 $x_+ \in (0,2)$ 与它相交（因为 $x_+ > 0 \iff a^2 < \frac{8}{3}$）。下半支在 $x_- < -2$ 相交。

对 $0 < a < 2$，每种情况都有 $x_- < -2$，因为 $a + \sqrt{8-2a^2} > 2$（把 $\sqrt{8-2a^2} > 2-a$ 两边平方即可）。各草图分别取 $a = -2.8,\ 1.8,\ 0.5,\ 1$。C_1 为青色，C_2 为梅紫色，切点为琥珀色。



第 (ii) 部分

当 $m = 12$ 时，把 $y = 4 - x^2$ 代入 $12x = k - y^2$，得 $12x = k - 16 + 8x^2 - x^4$，即

$$x^4 - 8x^2 + 12x + 16 - k = 0,$$

正如所求。

在切点 $x = a$，这条四次方程有重根（见上面的方框），所以它的导数在该处也等于零：

$$4a^3 - 16a + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^3 - 4a + 3 = 0.$$

由于 $a = 1$ 是一个根，$a^3 - 4a + 3 = (a-1)(a^2 + a - 3)$，因此

$$a = 1 \qquad \text{或} \qquad a = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

为求 k，在四次方程中代入 $x = a$，并利用 $a^3 = 4a - 3$ 化简，从而 $a^4 = 4a^2 - 3a$：

$$k = a^4 - 8a^2 + 12a + 16 = (4a^2 - 3a) - 8a^2 + 12a + 16 = -4a^2 + 9a + 16.$$

现在逐一看三种情况：

- $a = 1$：$k = 21$，所以 $k > 16$ 且 $k/m = \frac{7}{4} < 2$。这是情况 **(d)**。
- $a = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}) \approx 1.303$：这里 $a^2 = 3 - a$，所以 $k = -4(3-a) + 9a + 16 = 13a + 4 = \frac{1}{2}(13\sqrt{13} - 5) \approx 20.94$。它大于 16，因为 $13\sqrt{13} > 37$（平方：$2197 > 1369$）；它小于 24，因为 $13\sqrt{13} < 53$（$2197 < 2809$）。所以 $k > 16$ 且 $k/m < 2$，又是情况 **(d)**。
- $a = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}) \approx -2.303$：$k = 13a + 4 = -\frac{1}{2}(5 + 13\sqrt{13}) \approx -25.94 < 0$。这是情况 **(a)**。

所以只会出现草图 (a) 和 (d)。这与上面按 a 所作的分类一致：1 和 1.303 位于 $(\frac{2}{3}, \sqrt{8/3}) \approx (0.667, 1.633)$ 之内，而 $-2.303 < -2$。注意 $a^3 - 4a + 3 = 0$ 其实就是 $m = 4a(4 - a^2)$ 取 $m = 12$ 的情形。

两幅 (d) 图略有不同。对 $a = 1$，其他交点为 $x = -1 \pm \sqrt{6}$；在 $x \approx 1.45$ 的交点位于切点的*右方*，上半支从上方与 C_1 相切（如草图所示）。对 $a \approx 1.303$，交点在 $x \approx 0.84$，位于切点左方，上半支从下方相切。

验算

- 当 $m = 12$、$k = 21$ 时，四次式可因式分解为 $(x-1)^2(x^2 + 2x - 5)$。展开得 $x^4 - 8x^2 + 12x - 5$，正是 $16 - k = -5$ 时的四次式。
- 在 $(1, 3)$，C_1 的斜率为 -2；对 $12x = 21 - y^2$ 作隐函数微分（implicit differentiation），得 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -6/y = -2$。所以两曲线确实在该处相切。
- 数值上，对 $(0, 2)$ 内及 $a < -2$ 的随机 a，公式 $m = 4a(4 - a^2)$ 和 $k = (4 - a^2)(3a^2 + 4)$ 均令 $F(a)$ 和 $F'(a)$ 等于零，而各情况的分界正好落在 $a = \frac{2}{3}$ 和 $a = \sqrt{8/3}$。对 $a \approx 1.3028$，求根程序找到其他交点位于 $x \approx 0.8433$ 和 $x \approx -3.4488$，与 $x_\pm$ 的预测相符。

常见错误

- 要求四次方程只有一个根。“恰好相切一次”并不排除其他交点：在 $m = 12$ 的情况 (d) 中就有两个。
- 把 C_2 画成开口向右。当 $m > 0$ 时，$x = (k - y^2)/m$ 随 $|y|$ 增大而减小。
- 在 (a) 中，忘记 C_2 没有 y 截距，或把它的顶点放在 -2 与 0 之间。顶点必须在 -2 的左方。

STEP 之外

用切点 a 来标记各种构形，让我们初步窥见*判别式*和*包络线*（envelope）。使 F 有重根的 (m, k) 所组成的集合，就是曲线 $\big(4a(4 - a^2),\ (4 - a^2)(3a^2 + 4)\big)$；穿越这条曲线时，实交点的数目会改变二。这是平面曲线的代数几何（algebraic geometry）的起点，也是奇点理论（singularity theory，又称“突变理论”（catastrophe theory））的起点，后者用来研究解如何随参数变化。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了许多同类风格、STEP 式的曲线题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。