详细解答

STEP III 2012，第 2 题

纯数学 · 无穷乘积与级数

STEP III 2012，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s3-q2

关键思路

第 (i) 部分的乘积可以利用平方差（difference of two squares）逐个括号地合并，因此会像伸缩（telescoping）一样化简成非常简单的式子。把 $\frac{1}{1-x}$ 写成无穷乘积（infinite product）之后，取对数（logarithm）就把乘积变成和，再把这个和逐项微分（differentiate term by term），便得到分式组成的级数（series）。第 (ii) 部分是同一技巧的变奏：$1+x+x^2$ 是两个 $1-t$ 形式的式子之商，所以第 (i) 部分的结果可以分别应用到两者身上。

解答

全文假设 $|x|<1$，而且按题目所允许，我们不理会收敛（convergence）的问题。

第 (i) 部分

从左边开始合并括号，每次都用 $(1-a)(1+a)=1-a^2$：

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x)&=1-x^2,\\(1-x^2)(1+x^2)&=1-x^4,\\(1-x^4)(1+x^4)&=1-x^8,\end{aligned}$$

如此类推。每一步都令幂次加倍，而最后一个括号 $1+x^{2^n}$ 把 $1-x^{2^n}$ 变成 $1-x^{2^{n+1}}$。所以

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}.$$

由于 $x\neq 1$，我们可以除以 $1-x$：

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

移项后即得题目所要求的 $\frac{1}{1-x}$ 的表达式。

现在令 $n \to \infty$。因为 $|x| < 1$，所以 $x^{2^{n+1}} \to 0$，余项消失，于是

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{r=0}^{\infty}(1 + x^{2^r}).$$

每个因子都是正数（因为 $x^{2^r} > -1$），$1 - x$ 亦然，所以可以取对数。乘积的对数等于各对数之和：

$$-\ln(1-x) = \sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 + x^{2^r}),$$

两边乘以 -1 即得所求结果。

想一想 怎样由对数之和得到分式之和?

两边对 x 求导。根据连锁法则（chain rule），$\ln(1 + x^{2^r})$ 的导数（derivative）是

$$\frac{2^r x^{2^r-1}}{1 + x^{2^r}}.$$

左边则有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x}$。逐项微分（这正是题目叫我们不必理会的收敛问题）得

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^r x^{2^r-1}}{1 + x^{2^r}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots,$$

其中列出的是 $r = 0, 1, 2$ 的项。这就是所要求的级数。

第 (ii) 部分

左边是 $\ln(1 + x + x^2)$ 的导数，因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + x^2) = 1 + 2x$。因此我们要为 $1 + x + x^2$ 找一个对数和的表达式，而因式分解 $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$ 正好提供了一个：

$$\ln(1 + x + x^2) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x).$$

由于 $|x^3| < 1$ 同样成立，第 (i) 部分的对数结果在以 x^3 代替 x 后仍然成立。记 $y_r = x^{2^r}$，使得 $(x^3)^{2^r} = y_r^3$，则

$$\ln(1 + x + x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 + y_r^3) + \sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 + y_r) = -\sum_{r=0}^{\infty} \ln \frac{1 + y_r^3}{1 + y_r}.$$

立方和（sum of cubes）可分解为 $1 + y^3 = (1 + y)(1 - y + y^2)$，所以每个分式都等于 $1 - y_r + y_r^2$，从而

$$\ln(1 + x + x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 - x^{2^r} + x^{2^{r+1}}).$$

（每个 $1 - y + y^2 = (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ 都是正数，所以这些对数都有意义。）

想一想 求导时，负号到哪里去了？

连锁法则给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}) = \frac{-2^r x^{2^r-1}+2^{r+1}x^{2^{r+1}-1}}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}} = -\frac{2^r x^{2^r-1}(1-2x^{2^r})}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}},$$

而这个负号正好抵消和式前面的负号。两边逐项微分，得

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}(1-2x^{2^r})}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}.$$

首三项为

$$\begin{aligned} r=0: &\quad \frac{1-2x}{1-x+x^2},\\ r=1: &\quad \frac{2x(1-2x^2)}{1-x^2+x^4} = \frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4},\\ r=2: &\quad \frac{4x^3(1-2x^4)}{1-x^4+x^8} = \frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8}, \end{aligned}$$

这正是题目要我们证明的级数。

另一途径。恒等式 $(1+y+y^2)(1-y+y^2)=1+y^2+y^4$ 直接为 $1+x+x^2$ 提供一个伸缩乘积，就像第 (i) 部分那个一样：$1+x+x^2=(1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}})\big/\prod_{r=0}^{n}(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}})$，而分子趋向 1。

验算

- 代入 $x=0$：每条级数的两边都等于 1。
- 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，第 (ii) 部分的左边是 $\frac{2}{7/4}=\frac{8}{7}\approx 1.142857$。右边首四项之和为 1.142369，而由于幂 x^{2^r} 缩小得极快，误差也缩小得极快。
- 我们用分数精确验证了伸缩后的乘积，并取 30 项，在 $(-0.95, 0.95)$ 内随机抽取 1000 个 x，以数值方法验证了两条级数及各对数恒等式。

常见错误

- 用连锁法则时漏掉因子：x^{2^r} 的导数是 $2^r x^{2^r-1}$，而不是 $2^r x^{2^r}$。
- 第 (ii) 部分的整体符号弄错：$1-y+y^2$ 的导数是 $-1+2y$，正是这个负号抵消了和式前面的负号。

STEP 之外

乘积 $\prod(1+x^{2^r})$ 表明每个正整数都可以唯一地写成若干个不同的 2 的幂之和，这就是以生成函数（generating function）表达的二进制（binary）记数法。“不理会收敛”其实掩盖了一些真正的问题：甚么时候可以对无穷乘积取对数？甚么时候可以把级数逐项微分？大学第一个分析（analysis）课程会用一致收敛（uniform convergence）来回答这些问题，而在 $|x| \leq c < 1$ 上，这里的一切都是一致收敛的。清晰的讲解可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。